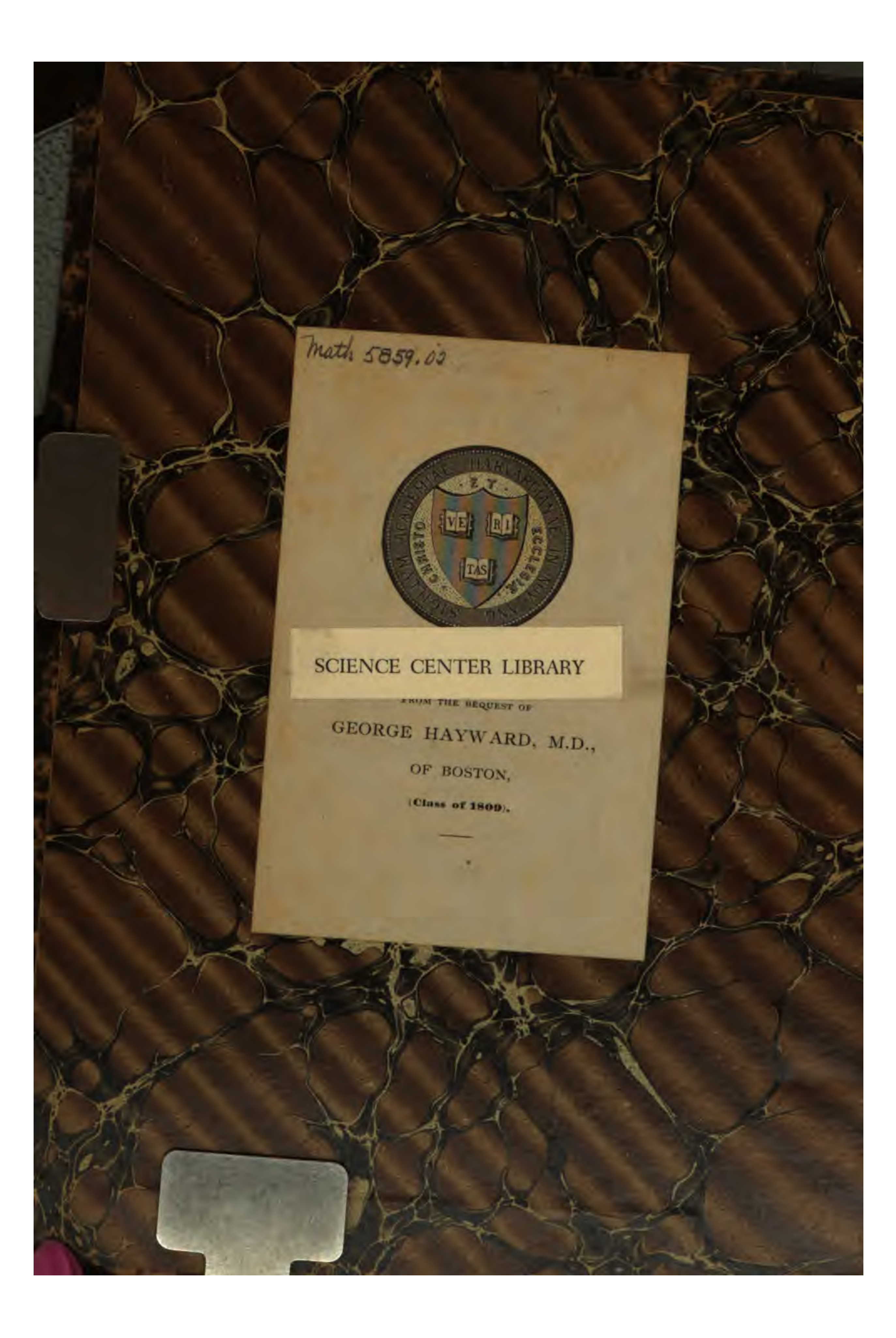
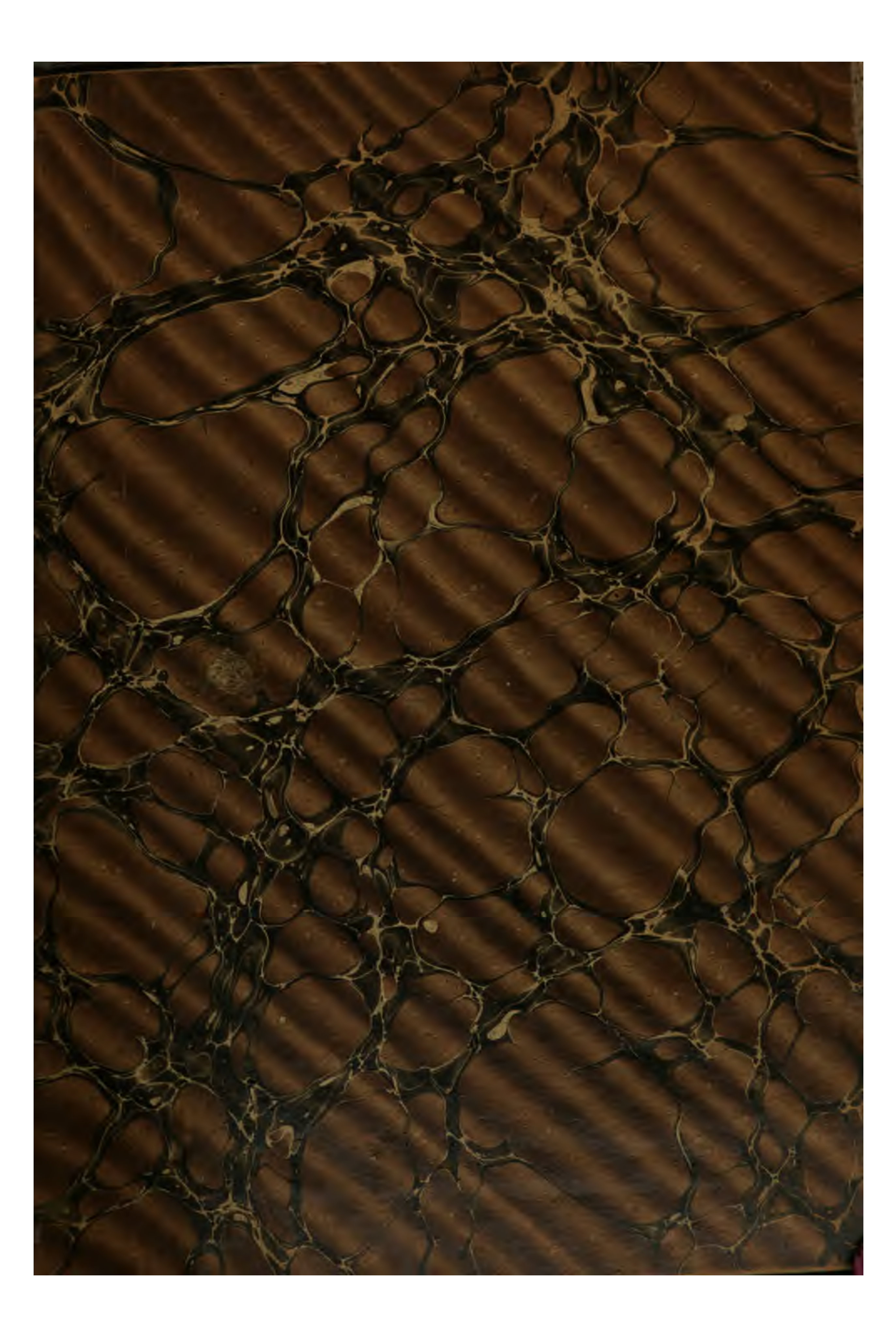

ath
359
2



VE RI TAS



LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE

ET

L'INSUFFISANCE DE SES PRINCIPES

PAR

M. l'Abbé ISSALY.

MÉMOIRE, FAISANT SUITE AUX « *PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE DES PSEUDO-SURFACES* », DU MÊME AUTEUR.

PARIS,
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE
6 et 12, rue de la Sorbonne.

1902

LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE

ET

L'INSUFFISANCE DE SES PRINCIPES.

courbure totale *négative* constante, la surface de révolution dite « pseudo-sphère » s'il est vrai, comme la suite le démontrera, qu'au moyen d'un facteur numérique variable, introduit dans l'expression de son élément linéaire, elle soit capable de se transformer en néo-surface à courbure totale *positive* ou même *nulle ?...*

d) En particulier, quelle valeur intrinsèque peut-on bien attacher à ses propriétés géométriques, à côté de celles du *pseudo-plan,* vraie et naturelle généralisation du plan, pseudo-surface, à la fois ombilicale, minima et développable, des pinceaux de pseudo-normales duquel nous avons déjà, du reste, entretenu précédemment le lecteur ?

e) Comment ne pas trouver excessive, exorbitante même, l'importance que l'on accorde, soit à l'élément linéaire d'une surface, soit à ce qu'on appelle sa représentation sphérique, alors que, à des éléments linéaires, non pas seulement distincts, mais tout à fait *hétérogènes,* peut correspondre une seule et même représentation sphérique, circonstance, on le verra, à l'endroit de laquelle les exemples abondent ?

f) Plus généralement, dirons-nous encore, que vaut, au fond, l'*applicabilité* d'une surface sur une autre, alors qu'on peut citer tel couple de néo-surface et de pseudo-surface (minima) parfaitement applicables entr'elles, possédant même courbure totale, mêmes lignes géodésiques, avec cette particularité commune, déjà signalée par nous, à savoir : que l'équation de ces lignes n'utilise pas seulement les trois coefficients de Gauss E, F, G et leurs dérivées, mais, en sus, deux coefficients nouveaux que les expressions des éléments linéaires respectifs des deux lieux précités sont *incapables de fournir ?*

g) Que penser enfin de ces équations aux dérivées partielles que les deux géométries, euclidienne ou non, mettent en jeu, équations que l'on a cru jusqu'ici ne pouvoir définir

que des surfaces classiques d'une certaine espèce et qui, en réalité, définissent tout aussi bien une double variété de néo-surfaces ou de pseudo-surfaces de la même espèce ?

Sans prolonger davantage cette énumération, nous prévenons le lecteur que notre travail se décomposera en deux parties : la première, théorique surtout et destinée à établir ou à rappeler les principes généraux qui doivent servir de base et, au besoin, d'éléments constitutifs à notre thèse ; la seconde, toute d'applications, ayant pour but de rendre plus palpable encore l'insuffisance des propriétés, soi-disant fondamentales, sur lesquelles la géométrie (plane) non euclidienne compte s'établir définitivement.

Entr'autres documents à consulter, nous citerons notre *Étude sur les Pseudo-surfaces, en général,* etc., insérée dans les « Nouvelles Annales » (1901, p. 53), puis, nos *Principes fondamentaux de la Théorie des Pseudo-surfaces* (Hermann, éditeur, 1902). — Pour abréger l'écriture, nous désignerons, d'ordinaire, ces deux écrits, le premier par (*E*), le second par (*P, F*).

LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE

ET

L'INSUFFISANCE DE SES PRINCIPES.

PREMIÈRE PARTIE.

PRINCIPES ANALYTIQUES GÉNÉRAUX PROPRES À SUPPLANTER CEUX RELATIFS À LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

I.

Quelques propriétés fondamentales des néo-surfaces et des pseudo-surfaces.

1. CLASSIFICATION ET NOTATIONS. — Considérons le système suivant:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= P\,du + Q\,du', \\ dy &= P'\,du + Q'\,du', \\ dz &= P''\,du + Q''\,du', \end{aligned}\right.$$

où P, Q, P', ... désignent des fonctions continues quelconques de u et u'.

1° Il résulte de notre *Étude*, etc., citée plus haut, que, pris dans toute sa généralité, ce système représente une *pseudo-surface* **F**, tangente en M à la face XY du trièdre mobile $MXYZ$. En appelant (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de ce point, par rapport au trièdre fixe $Mxyz$ ou T_0, l'équation de cette face ou de ce plan tangent sera

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & P & Q \\ y - y_0 & P' & Q' \\ z - z_0 & P'' & Q'' \end{vmatrix} = 0.$$

2° Pour que le système (1) représente une néo-surface, F_n, il faut et il suffit que l'on ait la condition suivante (E, n° 10):

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial u'} & P & Q \\ \frac{\partial Q'}{\partial u} - \frac{\partial P'}{\partial u'} & P' & Q' \\ \frac{\partial Q''}{\partial u} - \frac{\partial P''}{\partial u'} & P'' & Q'' \end{vmatrix} = 0,$$

condition qui revient à celle-ci : $p + q' = 0$ et exprime que les lignes de courbure de F_n sont *rectangulaires.*

3° Enfin, pour que ce même système (1) définisse une *surface ordinaire* F, il est nécessaire et suffisant que les trois conditions suivantes soient verifiées :

$$(4)\qquad \frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial u'}, \qquad \frac{\partial Q'}{\partial u} = \frac{\partial P'}{\partial u'}, \qquad \frac{\partial Q''}{\partial u} = \frac{\partial P''}{\partial u'}.$$

Elles expriment que les trois équations dont le système est formé sont devenues *intégrables*, en sorte que celui-ci équivaut alors à

$$(5)\qquad x = \varphi(u, u'), \qquad y = \psi(u, u'), \qquad z = \chi(u, u').$$

2. Comme corollaire, si l'on pose

$$(6)\qquad \begin{cases} A^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 = \sum P^2, \\ A'^2 = Q^2 + Q'^2 + Q''^2 = \sum Q^2, \\ B'' = PQ + P'Q' + P''Q'' = \sum PQ, \end{cases}$$

on déduira du système général (1)

$$(7)\quad dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = A^2 du^2 + A'^2 du'^2 + 2B'' du du';$$

mais on a, d'autre part :

$$(7')\qquad dS^2 = ds^2 + ds'^2 + 2 ds ds' \cos\Phi,$$

en désignant par ds, ds' les projections obliques de l'élément linéaire dS sur les lignes coordonnées (s), (s'), respectivement tangentes à MX et MY. Il vient donc, par comparaison :

$$(8)\qquad \cos\Phi = \frac{B''}{AA'}, \qquad \sin\Phi = \frac{1}{AA'}\sqrt{A^2A'^2 - B''^2} = \frac{H}{AA'}.$$

3. Relations différentielles. — Actuellement, soient les deux trié-

dres birectangles supplémentaires $MXYZ$ ou T, d'angle aigu Φ et MX_1Y_1Z ou T_1, d'angle $\pi - \Phi$. Si l'on désigne par $a, b, c, a', \ldots$ les cosinus directeurs des arêtes du premier et par $a_1, b_1, c_1, a'_1, \ldots$ ceux des arêtes du second, on pourra établir deux groupes de relations différentielles comprenant deux systèmes ternaires chacun. Voici le premier groupe :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial s} &= a'_1 r - a''_1 q \sin \Phi, \\ \frac{\partial a'}{\partial s} &= a''_1 p \sin \Phi - a_1 n, \\ \frac{\partial a''}{\partial s} &= a_1 q - a'_1 p, \end{aligned} \right.$$

$$(9^{\text{bis}}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial a}{\partial s'} = a'_1 r' - a''_1 q' \sin \Phi. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Le second est analogue, car il est le corrélatif du précédent, à savoir :

$$(9') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial s} &= a' n_1 - a'' q_1 \sin \Phi, \\ \frac{\partial a'_1}{\partial s} &= a'' p_1 \sin \Phi - a r_1, \\ \frac{\partial a''_1}{\partial s} &= a q_1 - a' p_1, \end{aligned} \right.$$

$$(9'^{\text{bis}}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial a_1}{\partial s'} = a' n'_1 - a'' q'_1 \sin \Phi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Bien que nous n'ayons, pour le moment, qu'à utiliser les systèmes (9), et (9bis) nous ferons remarquer, en passant, qu'entre eux tous, on a, parmi beaucoup d'autres relations, les suivantes (*P. F.*, n° 9) :

$$n_1 = n, \qquad r_1 = r, \qquad n'_1 = n', \qquad r'_1 = r';$$

comme aussi

$$a''_1 = a'', \qquad b''_1 = b'', \qquad c''_1 = c''.$$

Cela étant, si l'on tient compte de ce que, par hypothèse, $\sum a'^2 = 1$, $\sum a'' a'_1 = 0, \ldots$, on déduira des premiers systèmes le Tableau qui suit :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} p \sin \Phi &= \sum a'' \frac{\partial a'}{\partial s}, & p' \sin \Phi &= \sum a'' \frac{\partial a'}{\partial s'}, \\ -q \sin \Phi &= \sum a'' \frac{\partial a}{\partial s}, & -q' \sin \Phi &= \sum a'' \frac{\partial a}{\partial s'}. \end{aligned} \right.$$

Et comme, d'autre part,

$$\frac{a''}{bc' - cb'} = \frac{b''}{ca' - ac'} = \frac{c''}{ab' - ba'} = \frac{1}{\sin \Phi},$$

on peut, en conséquence, écrire

$$(11) \qquad -q \sin^2 \Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial s} & a & a' \\ \frac{\partial b}{\partial s} & b & b' \\ \frac{\partial c}{\partial s} & c & c' \end{vmatrix} = \mathbf{D},$$

et ainsi de suite. D'où, la série de rapports égaux facile à former

$$(12) \qquad \frac{-q}{\mathbf{D}} = \frac{p'}{\mathbf{D}'} = \frac{p}{\mathbf{D}''} = \frac{-q'}{\mathbf{D}''_1} = \frac{1}{\sin^2 \Phi} = \frac{A^2 A'^2}{H^2}.$$

Cela étant, des identités

$$dx = a\,ds + a'\,ds' = A a\,du + A' a'\,du' = P\,du + Q\,du',$$

. . . .

on tire

$$(13) \qquad a = \frac{P}{A}, \quad b = \frac{P'}{A}, \quad c = \frac{P''}{A}, \quad a' = \frac{Q}{A'}, \quad \ldots$$

puis, en différentiant,

$$(14) \qquad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial s} = \frac{1}{A^2}\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{P}{A^3}\frac{\partial A}{\partial u}, \\ \frac{\partial a'}{\partial s} = \frac{1}{AA'}\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{Q}{AA'^2}\frac{\partial A'}{\partial u}, \\ \frac{\partial a}{\partial s'} = \frac{1}{AA'}\frac{\partial P}{\partial u'} - \frac{P}{A^2 A'}\frac{\partial A}{\partial u'}, \\ \frac{\partial a'}{\partial s'} = \frac{1}{A'^2}\frac{\partial Q}{\partial u'} - \frac{Q}{A'^3}\frac{\partial A'}{\partial u'}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Or si, de ce dernier tableau, on sépare les valeurs des dérivées $\frac{\partial a}{\partial s}$, $\frac{\partial b}{\partial s}$, $\frac{\partial c}{\partial s}$ et qu'on les porte dans le déterminant (11), il deviendra, après réductions :

$$(11') \qquad -q \sin^2 \Phi = \frac{1}{A^3 A'} \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} & P & Q \\ \frac{\partial P'}{\partial u} & P' & Q' \\ \frac{\partial P''}{\partial u} & P'' & Q'' \end{vmatrix} = \frac{D}{A^3 A'};$$

ce qui permet, finalement, de remplacer la suite (12) par celle-ci, d'un emploi plus commode:

$$(12') \qquad \frac{-q}{\frac{A'}{A}D} = \frac{p'}{\frac{A}{A'}D'} = \frac{p}{D''} = \frac{-q'}{D''_1} = \frac{1}{H^2}.$$

A peine est-il besoin d'ajouter (*P. F.*, n° 30) que, dans le cas des surfaces ordinaires, le déterminant D, par exemple, prend la forme connue

$$(15) \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u'} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u'} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u'} \end{vmatrix}.$$

4. Lignes de courbure et lignes asymptotiques. — 1° On a vu (*P. F.*, n° 26) que les lignes de courbure de la pseudo-surface **F** peuvent s'écrire

$$(16) \qquad p_1 ds^2 + (q_1 + p'_1) ds\, ds' + q'_1 ds'^2 = 0,$$

ou, ce qui revient au même:

$$(16') \left\{ \begin{aligned} (p + q\cos\Phi)ds^2 + [(q + p\cos\Phi) + (p' + q'\cos\Phi)]\,ds\,ds' \\ + (q' + p'\cos\Phi)ds'^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Substituant aux composantes et aux arcs leurs valeurs, on a cette autre forme:

$$(16'') \left\{ \begin{aligned} (A^2D'' - B''D)\,du^2 - [(A'^2D - A^2D') - B''(D'' - D''_1)]\,du\,du' \\ - (A'^2D''_1 - B''D')\,du'^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour que les lignes de courbure (16) soient rectangulaires et deviennent, par là même, les lignes de courbure d'une néo-surface, il faut et il suffit que l'on ait:

$$(17) \qquad p_1 + q'_1 - (q_1 + p'_1)\cos\Phi = 0,$$

c'est-à-dire, épuivalemment:

$$(17') \qquad p + q' = 0, \qquad \text{ou bien} \qquad D'' = D''_1,$$

conditions qui ne diffèrent pas, elles-mêmes, rappelons-le, de la condition (3).

2° Quant aux lignes asymptotiques, leur équation générale est:

(18) $$-q\,ds^2 + (p - q')\,ds\,ds' + p'\,ds'^2 = 0,$$

ou encore

(18') $$D\,du^2 + (D'' + D''_1)\,du\,du' + D'\,du'^2 = 0.$$

α. Pour que ces mêmes lignes soient rectangulaires et transforment ainsi la pseudo-surface **F** en pseudo-surface minima $\mathbf{F}_\mu$, il est nécessaire et suffisant que l'on ait:

(19) $$-q + p' - (p - q')\cos\Phi = 0,$$

ou bien

(19') $$q_1 - p'_1 = 0,$$

ou enfin

(19'') $$A'^2 D + A^2 D' - B''(D'' + D''_1) = 0.$$

β. Les lignes (18') seront les lignes asymptotiques d'une néo-surface si $D'' = D''_1$ et, plus spécialement, d'une néo-surface minima si l'on a

(19''') $$A'^2 D + A^2 D' - 2B''D'' = 0.$$

5. Lignes géodésiques. — Préparons d'abord leur calcul. A cet effet nous poserons, pour abréger (*E.*, n° 4, 2°):

(20) $$\left\{\begin{aligned} &\sum P\frac{\partial P}{\partial u} = \sum PR = A\frac{\partial A}{\partial u}, \quad \sum Q\frac{\partial Q}{\partial u'} = \sum QT = A'\frac{\partial A'}{\partial u'},\\ &\sum P\frac{\partial P}{\partial u'} = \sum PS_1 = A\frac{\partial A}{\partial u'}, \quad \sum Q\frac{\partial Q}{\partial u} = \sum QS = A'\frac{\partial A'}{\partial u},\\ &\sum P\frac{\partial Q}{\partial u} = \sum PS = A_0\frac{\partial A}{\partial u'}, \quad \sum Q\frac{\partial P}{\partial u'} = \sum QS_1 = A'_0\frac{\partial A'}{\partial u},\end{aligned}\right.$$

conjointement avec

(20') $$\left\{\begin{aligned} &\sum Q\frac{\partial P}{\partial u} = \sum QR = \frac{\partial B''}{\partial u} - A_0\frac{\partial A}{\partial u'},\\ &\sum P\frac{\partial Q}{\partial u'} = \sum PT = \frac{\partial B''}{\partial u'} - A'_0\frac{\partial A'}{\partial u},\end{aligned}\right.$$

formules qui concernent, à la fois, les néo-surfaces et les pseudo-surfaces et ne conviennent aux surfaces usuelles que si l'on y fait

(21) $$A_0 = A, \quad A'_0 = A',$$

ou, pour introduire une notation qui nous sera très utile,

(21') $$\frac{A_0}{A} = a_0 = 1, \quad \frac{A'_0}{A'} = a'_0 = 1.$$

Cela posé, nous rappelons que l'équation la plus générale, c'est-à-

dire, sans distinction de cas, des lignes géodésiques, peut s'écrire (*P. F.*, n° 23):

(22) $$d\varphi + r\,ds + r'\,ds' = 0,$$

ou bien

(22') $$d\varphi' - n\,ds - n'\,ds' = 0,$$

forme abrégée de cette autre

(22'') $$d\varphi' - \left(r + \frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)ds - \left(r' + \frac{\partial \Phi}{\partial s'}\right)ds' = 0.$$

Bien plus, les deux premières de ces formes peuvent être avantageusement remplacées par la suivante qui donne lieu à des calculs plus symétriques :

(23) $$d\varphi - d\varphi' + (n + r)\,ds + (n' + r')\,ds' = 0,$$

les angles φ et φ' étant liés entre eux, on s'en souvient, par les relations

(24) $$\frac{ds}{\sin\varphi'} = \frac{ds'}{\sin\varphi} = \frac{dS}{\sin\Phi}.$$

En adoptant cette dernière forme (23), on devra exprimer, avant tout, $d\varphi - d\varphi'$ en fonction des données. On différentiera, à cet effet, cette suite de rapports égaux, après y avoir remplacé ds et ds' par leurs valeurs $A\,du$ et $A'\,du'$. Éliminant ensuite $d^2 S$ entre les deux équations obtenues, on trouvera, à l'aide de combinaisons convenables de ces premiers résultats :

(25) $$\left\{\begin{aligned} &(A^2 du^2 + A'^2 du'^2 + 2B''\,du\,du')(d\varphi - d\varphi') \\ &\quad = \frac{1}{H}(A^2 du'^2 - A'^2 du^2)\left(\frac{B''}{A}dA + \frac{B''}{A'}dA' - dB''\right) \\ &\quad - 2H\left[\frac{d(A\,du)}{A}du - \frac{d(A'\,du')}{A}du'\right]. \end{aligned}\right.$$

Il reste à calculer n, r, n', r'. Or si l'on remonte au Tableau (9) et (9bis), on y voit que

$$n = -\sum a_1 \frac{\partial a'}{\partial s}, \qquad r = \sum a'_1 \frac{\partial a}{\partial s},$$

$$n' = -\sum a_1 \frac{\partial a'}{\partial s'}, \qquad r' = \sum a'_1 \frac{\partial a}{\partial s'}.$$

Mais on sait que

$$a_1 = \frac{1}{\sin \Phi}(a - a' \cos \Phi) = \frac{1}{H}(A A' a - B'' a'),$$

$$a'_1 = \frac{1}{\sin \Phi}(a' - a \cos \Phi) = \frac{1}{H}(A A' a' - B'' a);$$

et puisque, d'autre part, les dérivées $\frac{\partial a}{\partial s}$, $\frac{\partial a'}{\partial s}$, ... sont données par le système (14), il vient, eu égard aux notations (20) et (20′):

$$(26) \quad \begin{cases} H A n = - A_0 \dfrac{\partial A}{\partial u'} + \dfrac{B''}{A'} \dfrac{\partial A'}{\partial u}, \\ H A' n' = A'_0 \dfrac{\partial A'}{\partial u} + \dfrac{B''}{A'} \dfrac{\partial A'}{\partial u'} - \dfrac{\partial B''}{\partial u'}; \end{cases}$$

$$(26') \quad \begin{cases} H A r = - A_0 \dfrac{\partial A}{\partial u'} - \dfrac{B''}{A} \dfrac{\partial A}{\partial u} + \dfrac{\partial B''}{\partial u}, \\ H A' r' = A'_0 \dfrac{\partial A'}{\partial u} - \dfrac{B''}{A} \dfrac{\partial A}{\partial u'}. \end{cases}$$

Portant le tout dans l'équation (23), préalablement transformée comme il suit

$$(23') \quad d\varphi - d\varphi' + (A n + A r) du + (A' n' + A' r') du' = 0,$$

on trouve finalement pour l'équation des lignes géodésiques, *soit de* **F**, *soit de* F_n:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} &(A^2 A'^2 - B''^2)(du\, d^2 u' - du'\, d^2 u) \\ &\quad = \left(A^2 A_0 \frac{\partial A}{\partial u'} + B'' A \frac{\partial A}{\partial u} - A^2 \frac{\partial B''}{\partial u} \right) du^3 \\ &\quad + \Big[A'^2 A \frac{\partial A}{\partial u} - A^2 (A'_0 + A') \frac{\partial A'}{\partial u} \\ &\qquad + B'' (2 A_0 + A) \frac{\partial A}{\partial u'} - B'' \frac{\partial B''}{\partial u} \Big] du^2 du' \\ &\quad - \Big[A^2 A' \frac{\partial A'}{\partial u'} - A'^2 (A_0 + A) \frac{\partial A}{\partial u'} \\ &\qquad + B'' (2 A'_0 + A') \frac{\partial A'}{\partial u} - B'' \frac{\partial B''}{\partial u'} \Big] du\, du'^2 \\ &\quad - \left(A'^2 A'_0 \frac{\partial A'}{\partial u} + B'' A' \frac{\partial A'}{\partial u'} - A'^2 \frac{\partial B''}{\partial u'} \right) du'^3. \end{aligned} \right.$$

Si, pour la vérifier, on y pose $A_0 = A$, $A'_0 = A'$, on retombera exactement sur l'équation connue des lignes géodésiques des surfaces ordinaires F.

II.

Application à deux importantes variétés de néo-surfaces.

6. I. — Variété de néo-surfaces généralisant les surfaces de révolution. — Considérons d'abord le système d'équations:

$$(28)\qquad \begin{cases} dx = -f(\rho)\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, d\rho, \\ dy = f(\rho)\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, d\rho, \\ dz = \varphi'(\rho)\, d\rho, \end{cases}$$

dans lequel on reconnait, pour $f(\rho) = \rho$, celui qui définit une surface ordinaire de révolution, autour de l'axe Oz, avec $z = \varphi(\rho)$ pour courbe méridienne. Il s'agit de prouver que, pris tel quel, le lieu $\Sigma_{n,f}$ ou, simplement, Σ_f que ce système représente, est une néo-surface, et non pas une pseudo-surface, bien que ses deux premières équations ne soient pas intégrables.

A cet effet, posons $u = \theta$, $u' = \rho$, dans les valeurs des arcs ds, ds'. On verra sans peine qu'ici

$$A^2 = f^2, \qquad A'^2 = 1 + \varphi'^2, \qquad B'' = 0;$$
$$D = -f^2\varphi', \qquad D' = -f\varphi'', \qquad D'' = D''_1 = 0.$$

La condition $D'' = D''_1$ qui caractérise toute néo-surface (n° 4), étant identiquement satisfaite, la propriété énoncée se trouve par là-même établie.

Désignons maintenant par dS l'élément linéaire: par $d\varepsilon$ (*P. F.*, n° 13, 3°) ou, sans confusion à craindre, par $d\Sigma$, sa représentation sphérique; on aura, en premier lieu,

$$(29)\qquad dS^2 = f^2 d\theta^2 + (1 + \varphi'^2)\, d\rho^2,$$

puis, à l'aide de la formule générale

$$(30)\qquad \begin{cases} H^4 d\Sigma^2 = A^2(D''\,du + D'\,du')^2 + A'^2(D\,du + D''_1\,du')^2 \\ \qquad\qquad - 2B''(D''\,du + D'\,du')(D\,du + D''_1\,du'), \end{cases}$$

l'expression suivante

$$(30')\qquad d\Sigma^2 = \frac{\varphi'^2}{1 + \varphi'^2}\, d\theta^2 + \frac{\varphi''^2}{(1 + \varphi'^2)^2}\, d\rho^2.$$

De là, cette double conséquence:

1° L'élément linéaire d'une néo-surface de la variété Σ_f ne doit pas être confondu avec celui d'une surface proprement dite de révolution.

2° Il n'en est plus nécessairement de même pour leur représentation sphérique qui peut convenir *simultanément* aux deux cas. C'est ce que prouve, par exemple, la formule (30') de laquelle $f(\rho)$ a disparu.

Passons aux lignes remarquables de Σ_f. — Et d'abord les lignes de courbure ont pour équation : $ds\,ds' = 0$. Elles sont donc rectangulaires et tangentes aux axes coordonnés MX, MY, ainsi qu'on pouvait le prévoir.

De leur côté, les lignes asymptotiques sont définies par l'équation

$$f\varphi' d\theta^2 + \varphi'' d\rho^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$\theta = \int \sqrt{\frac{\varphi''}{f\varphi'}}\,d\rho + C = \int \psi(\rho)\,d\rho + C.$$

Viennent enfin les lignes géodésiques qui sont données par l'équation du second ordre

$$(31)\quad f(1+\varphi'^2)\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + [f\varphi'\varphi'' - (1+f'^2)(1+\varphi'^2)]\frac{d\rho^2}{d\theta^2} - f^2 = 0,$$

équation que nous avons eu occasion d'intégrer dans quelques-uns de ses cas particuliers et sur laquelle nous reviendrons ultérieurement.

Que si, par anticipation, on tient à connaître l'expression de la *courbure totale* des néo-surfaces Σ_f, on trouvera, sans nouveaux calculs:

$$(32)\qquad K'' = \frac{DD'}{A^4 A'^4} = \frac{\varphi'\varphi''}{f(1+\varphi'^2)^2}.$$

7. II. — Variété de néo-surfaces minima. — C'est au système primitif

$$(33)\qquad \begin{cases} dx = P\,du + Q\,du', \\ dy = P'\,du + Q'\,du', \\ dz = P''\,du + Q''\,du', \end{cases}$$

qu'il nous faut revenir ici. Nous y supposerons vérifiées les conditions suivantes :

$$(34)\qquad \begin{cases} P^2 + P'^2 + P''^2 = \sum P^2 = A^2 = 0, \\ Q^2 + Q'^2 + Q''^2 = \sum Q^2 = A'^2 = 0; \end{cases}$$

et la question principale est de montrer qu'elles *suffisent* pour que le système (33) représente des néo-surfaces minima F^0_μ, c'est-à-dire des néo-surfaces dont les lignes asymptotiques sont, par définition, rectangulaires et satisfont par conséquent à la relation (19''').

A cet effet, on remarquera que les conditions (34) seront identiquement vérifiées si l'on pose

$$(35)\qquad \begin{cases} P + iP' = -uP'', & Q + iQ' = -u'Q'', \\ P - iP' = \dfrac{P''}{u}, & Q - iQ' = \dfrac{Q''}{u'}; \end{cases}$$

ce qui entraîne, en résolvant et abrégeant :

$$(35')\ \begin{cases} P = \dfrac{1-u^2}{2u}P'' = mP'', & Q = \dfrac{1-u'^2}{2u'}Q'' = m'Q'', \\ P' = i\dfrac{1+u^2}{2u}P'' = inP''; & Q' = i\dfrac{1+u'^2}{2u'}Q'' = in'Q''. \end{cases}$$

Portons ces valeurs dans les équations (33); elles deviendront

$$(33')\qquad \begin{cases} dx = mP''du + m'Q''du', \\ dy = inP''du + in'Q''du', \\ dz = P''du + Q''du'. \end{cases}$$

Formons, après cela, les déterminants connus D'' et D''_1. — Comme, de (35'), on déduit

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial u'} = m\dfrac{\partial P''}{\partial u'}, & \dfrac{\partial Q}{\partial u} = m'\dfrac{\partial Q''}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial P'}{\partial u'} = in\dfrac{\partial P''}{\partial u'}, & \dfrac{\partial Q'}{\partial u} = in'\dfrac{\partial Q''}{\partial u}, \end{cases}$$

on reconnaitra sans peine que ces deux déterminants sont identiquement *nuls*; car pour D'', par exemple, on a

$$D'' = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial u} & P & Q \\ \dfrac{\partial Q'}{\partial u} & P' & Q' \\ \dfrac{\partial Q''}{\partial u} & P'' & Q'' \end{vmatrix} = iP''Q''\dfrac{\partial Q''}{\partial u}\begin{vmatrix} m' & m & m' \\ n' & n & n' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En leur adjoignant l'hypothèse $A^2 = A'^2 = 0$, la relation caractéristique (19''') se trouve satisfaite et la proposition à établir, démontrée.

Il ne sera pas sans intérêt de former, comme corollaire, l'équation des lignes remarquables du lieu F^0_μ ou (33').

Pour cela, il nous faut préalablement connaître et développer les deux autres déterminants D et D'. Or on trouve

$$D = i\frac{(u-u')^2}{2u^2u'}P''^2 Q'',$$

$$D' = -i\frac{(u-u')^2}{2uu'^2}P''Q''^2;$$

d'où il suit que les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de nos néo-surfaces ont respectivement pour équation

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{P''}{u}du^2 + \dfrac{Q''}{u'}du'^2 = 0, \\ \dfrac{P''}{u}du^2 - \dfrac{Q''}{u'}du'^2 = 0. \end{cases}$$

Quant aux lignes géodésiques, on déduit, pour les représenter, de la formule (27), l'équation suivante:

$$(38)\quad \begin{cases} du\,d^2u' - du'\,d^2u \\ \quad = \left[\dfrac{1}{P''}\dfrac{\partial P''}{\partial u} - \dfrac{1}{Q''}\dfrac{\partial Q''}{\partial u} + \dfrac{u+u'}{u(u-u')}\right]du^2du' \\ \quad - \left[\dfrac{1}{Q''}\dfrac{\partial Q''}{\partial u'} - \dfrac{1}{P''}\dfrac{\partial P''}{\partial u'} + \dfrac{u+u'}{u'(u'-u)}\right]du\,du'^2. \end{cases}$$

8. *Cas particulier: Surfaces minima correspondantes.* — Si l'on écrit la condition d'intégrabilité de chacune des trois équations (33'), on remarquera qu'elles ne deviennent *compatibles* entr'elles que si l'on suppose $\dfrac{\partial P''}{\partial u'} = \dfrac{\partial Q''}{\partial u} = 0$. Donc P'' doit être fonction de u et Q'', fonction de u', exclusivement. Posant alors commodément: $P'' = uF(u)$ et $Q'' = u'G(u')$, on obtient cette forme classique de surfaces minima, *toutes particulières*, qui satisfont aux conditions (34), à savoir:

$$(33'')\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int(1-u^2)F(u)du + \dfrac{1}{2}\int(1-u'^2)G(u')du', \\ y = \dfrac{i}{2}\displaystyle\int(1+u^2)F(u)du + \dfrac{i}{2}\int(1+u'^2)G(u')du', \\ z = \displaystyle\int uF(u)du + \int u'G(u')du', \end{cases}$$

forme que Weierstrass, on le sait, a débarrassé de tout signe d'intégration, en posant: $F(u) = f'''(u)$ et $G(u') = g'''(u')$.

On observera que, dans le cas actuel, les lignes (37) deviennent

$$(37')\quad \begin{cases} F(u)du^2 + G(u')du'^2 = 0, \\ F(u)du^2 - G(u')du'^2 = 0, \end{cases}$$

et que les géodésiques (38) se réduisent à

$$(38') \quad \begin{cases} du\, d^2u' - du'\, d^2u = \left(\dfrac{F'(u)}{F(u)} + \dfrac{2}{u - u'}\right) du^2\, du' \\ \qquad\qquad - \left(\dfrac{G'(u')}{G(u)} + \dfrac{2}{u' - u}\right) du\, du'^2. \end{cases}$$

Nous terminerons par les remarques suivantes :

α. Si l'on forme l'équation du plan tangent (2) relatif à chacun des deux cas, on trouvera *une seule et même équation*, qui est

$$(1 - uu')(x - x_0) + i(1 + uu')(y - y_0) + (u + u')(z - z_0) = 0.$$

β. Dans les néo-surfaces minima (33'), l'élément linéaire et sa représentation sphérique ont pour expression respective :

$$(39) \quad \begin{cases} dS^2 = 2B''\, du\, du' = -\dfrac{(u - u')^2}{uu'} P''\, Q''\, du\, du', \\ d\Sigma^2 = -2\dfrac{DD'}{B''^3} du\, du' = \dfrac{4\, du\, du'}{(u - u')^2}. \end{cases}$$

γ. Dans le cas des surfaces minima qui leur correspondent, on a semblablement

$$(39') \quad \begin{cases} dS^2 = -(u - u')^2 F(u)\, G(u')\, du\, du', \\ d\Sigma^2 = \dfrac{4\, du\, du'}{(u - u')^2}; \end{cases}$$

d'où, ce fait qu'ici encore les valeurs de dS^2 sont différentes, tandis que celles de $d\Sigma^2$ coïncident. (*Voir* l'AVANT-PROPOS et le n° 6).

δ. On en tire toutefois cette expression, *commune* aux deux cas et essentiellement *négative*, de la courbure totale :

$$K'' = \frac{DD'}{B''^4} = -\frac{d\Sigma^2}{dS^2}.$$

III.

Systèmes ternaires différentiels applicables, à la fois, aux surfaces, aux néo-surfaces et aux pseudo-surfaces.

9. Comme, dans ce qui suit, nous aurons à faire usage des deux systèmes corrélatifs (9) et (9'), nous rappelons qu'entre les cosinus directeurs qui y figurent, on a les relations

$$(40) \qquad \frac{a_1}{a - a' \cos\Phi} = \frac{a'_1}{a' - a\cos\Phi} = \frac{1}{\sin\Phi};$$

puis, entre les composantes p, q, p_1, q_1 :

$$(41)\qquad \frac{p_1}{p+q\cos\Phi}=\frac{q_1}{q+p\cos\Phi}=\frac{1}{\sin\Phi},$$

avec leurs analogues en p', q', p'_1, q'_1.

Cela posé, remontons aux expressions (13) des cosinus directeurs a, b, c, a', ... du trièdre $MXYZ$. Nous savons qu'elles conviennent, sans restriction, aux pseudo-surfaces. Pour devenir applicables aux néo-surfaces, il suffit d'y tenir compte de la condition $p=-q'$ ou $D''=D''_1$ (17'). Enfin, lorsqu'il s'agit de surfaces usuelles, on a, tout spécialement alors

$$(42)\qquad \begin{cases} P=\dfrac{\partial x}{\partial u}, \quad P'=\dfrac{\partial y}{\partial u}, \quad P''=\dfrac{\partial z}{\partial u}, \quad Q=\dfrac{\partial x}{\partial u'}, \ldots \\ A^2=\sum\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \quad A'^2=\sum\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 \quad B''=\sum\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial u'}. \end{cases}$$

Quoiqu'il en soit ici de cette distinction, les seconds membres des formules (13) sont, *dans les trois cas,* des fonctions continues de u et de u' et, à ce seul titre, on a nécessairement les identités

$$\frac{\partial^2 a}{\partial u\,\partial u'}=\frac{\partial^2 a}{\partial u'\,\partial u}, \quad \frac{\partial^2 a'}{\partial u\,\partial u'}=\frac{\partial^2 a'}{\partial u'\,\partial u}, \quad \frac{\partial^2 a''}{\partial u\,\partial u'}=\frac{\partial^2 a''}{\partial u'\,\partial u}.$$

En en développant les calculs, à l'aide des deux systèmes (9), (9') et des formules (40), les systèmes étant mis d'abord sous la forme appropriée :

$$\frac{\partial q}{\partial u}=a'_1.Ar-a''_1.Aq\sin\Phi,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial u}=a'.An_1-a''.Aq_1\sin\Phi,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on arrive à ces trois équations différentielles distinctes :

$$(43)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u'}(Ap\sin\Phi)-\dfrac{\partial}{\partial u}(A'p'\sin\Phi) \\ \qquad =AA'[(qn'-nq')+(pn'-np')\cos\Phi], \\ \dfrac{\partial}{\partial u'}(Aq\sin\Phi)-\dfrac{\partial}{\partial u}(A'q'\sin\Phi) \\ \qquad =AA'[(rp'-pr')+(rq'-qr')\cos\Phi], \\ \dfrac{\partial}{\partial u'}(Ar)-\dfrac{\partial}{\partial u}(A'r') \\ \qquad =H(pq'-qp')=HK''. \end{cases}$$

Les identités similaires $\frac{\partial^2 a_1}{\partial u \partial u'} = \frac{\partial^2 a_1}{\partial u' \partial u}$, ... conduiraient, à leur tour, au système ternaire corrélatif :

$$
(43') \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u'}(A p_1 \sin \Phi) - \frac{\partial}{\partial u}(A' p'_1 \sin \Phi) \\
&\qquad = A A' [(q_1 r'_1 - r_1 q'_1) - (p_1 r'_1 - r_1 p'_1) \cos \Phi], \\
&\frac{\partial}{\partial u'}(A q_1 \sin \Phi) - \frac{\partial}{\partial u}(A' q'_1 \sin \Phi) \\
&\qquad = A A' [(n_1 p'_1 - p_1 n'_1) - (n_1 q'_1 - q_1 n'_1) \cos \Phi], \\
&\frac{\partial}{\partial u'}(A r_1) - \frac{\partial}{\partial u}(A' r'_1) \\
&\qquad = H(p_1 q'_1 - q_1 p'_1) - H K''.
\end{aligned}
\right.
$$

Mais, dans les transformations suivantes, nous nous en tiendrons au système (43).

10. Première transformation. — Des formules (8) et (12'), il résulte que l'on a

$$
(44) \quad \left\{
\begin{aligned}
&A p \sin \Phi = \frac{D''}{A' H}, \qquad A q \sin \Phi = - \frac{D}{A H}, \\
&A' p' \sin \Phi = \frac{D'}{A' H}, \qquad A' q' \sin \Phi = - \frac{D''_1}{A H};
\end{aligned}
\right.
$$

ce qui conduit naturellement à poser

$$
(45) \qquad \frac{D}{H} = \Delta, \quad \frac{D'}{H} = \Delta', \quad \frac{D''}{H} = \Delta'', \quad \frac{D''_1}{H} = \Delta''_1.
$$

Si, maintenant, nous portons ces valeurs dans le système (43), et que nous utilisions les expressions (26) et (26'), il viendra

$$
(46) \quad \left\{
\begin{aligned}
&H^2 \left(\frac{\partial \Delta''}{\partial u'} - \frac{\partial \Delta'}{\partial u} \right) = M \Delta + M' \Delta' + M'' \Delta'' + M''_1 \Delta''_1, \\
&H^2 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial u'} - \frac{\partial \Delta''_1}{\partial u} \right) = N \Delta + N' \Delta + N'' \Delta'' + N''_1 \Delta''_1, \\
&\qquad \frac{\Delta \Delta' - \Delta'' \Delta''_1}{H^2} = K'',
\end{aligned}
\right.
$$

à condition de poser, dans la première :

$$(a)\qquad \left\{ \begin{aligned} M &= - A'^2 A'_0 \frac{\partial A'}{\partial u} - B'' A' \frac{\partial A'}{\partial u'} + A'^2 \frac{\partial B''}{\partial u'}, \\ M' &= - A^2 A' \frac{\partial A'}{\partial u} + B'' A_0 \frac{\partial A}{\partial u'}, \\ M'' &= A^2 A' \frac{\partial A'}{\partial u'} + B'' A'_0 \frac{\partial A'}{\partial u} - B'' \frac{\partial B''}{\partial u'}, \\ M''_1 &= - A'^2 A_0 \frac{\partial A}{\partial u'} + B'' A' \frac{\partial A'}{\partial u}, \end{aligned} \right.$$

puis, dans la seconde,

$$(b)\qquad \left\{ \begin{aligned} N &= A'^2 A \frac{\partial A}{\partial u'} - B'' A'_0 \frac{\partial A'}{\partial u}, \\ N' &= A^2 A_0 \frac{\partial A}{\partial u'} + B'' A \frac{\partial A}{\partial u} - A^2 \frac{\partial B''}{\partial u}, \\ N'' &= A^2 A'_0 \frac{\partial A'}{\partial u} - B'' A \frac{\partial A}{\partial u'}, \\ N''_1 &= - A'^2 A \frac{\partial A}{\partial u} - B'' A_0 \frac{\partial A}{\partial u'} + B'' \frac{\partial B''}{\partial u}, \end{aligned} \right.$$

d'où, cette remarque : que des fonctions M on peut passer aux fonctions N par de simples changements de signes et d'accents, vû que, *symboliquement*, on peut écrire :

$$N \equiv - M', \quad N' \equiv - M, \quad N'' \equiv - M''_1, \quad N''_1 \equiv - M''.$$

Quant à la troisième des équations (46), comme elle provient de celle-ci :

$$(c)\qquad \frac{\partial}{\partial u'}(Ar) - \frac{\partial}{\partial u}(A'r') = HK'',$$

on exprimera son premier membre en fonction, non pas des trois coefficients A, A', B'', seulement et de leurs dérivées, comme dans le cas des surfaces ordinaires (théorème de GAUSS), mais en fonction des cinq coefficients A, A', A_0, A'_0, B'', et de leurs dérivées. Il suffira, pour cela, de substituer à Ar et à $A'r'$ leurs valeurs (26').

Le résultat, il est bon de le rappeler, peut être mis sous la forme de la différence de deux déterminants, forme élégante que l'on trouvera dans notre *Étude* sur les pseudo-surfaces (*Nouvelles Annales*, 1901, p. 82).

Que si, dans ces diverses formules, on tient à substituer au coefficient B'' sa valeur $AA' \cos \Phi$, il faudra également remplacer les ex-

pressions (26') de Ar et $A'r'$ par celles que contient le système complet qui suit (*N. A.*, 1900, p. 49):

$$(47)\quad \begin{cases} Ar + \dfrac{\partial\Phi}{\partial u} = An = -\dfrac{1}{A'\sin\Phi}\left(\dfrac{A_0}{A}\dfrac{\partial A}{\partial u'} - \dfrac{\partial A'}{\partial u}\cos\Phi\right), \\ A'r' = A'n' - \dfrac{\partial\Phi}{\partial u'} = \dfrac{1}{A\sin\Phi}\left(\dfrac{A'_0}{A'}\dfrac{\partial A'}{\partial u} - \dfrac{\partial A}{\partial u'}\cos\Phi\right). \end{cases}$$

11. Deuxième transformation. — Bien que moins générale que la précédente, cette nouvelle transformation nous sera, dans la suite, d'un très grand secours. Pour l'effectuer, nous remarquons, avant tout que, du Tableau (20), on déduit notamment (21'):

$$(48)\quad \begin{cases} \dfrac{\sum P\dfrac{\partial Q}{\partial u}}{\sum P\dfrac{\partial P}{\partial u'}} = \dfrac{PS + P'S' + P''S''}{PS_1 + P'S'_1 + P''S''_1} = \dfrac{A_0\dfrac{\partial A}{\partial u'}}{A\dfrac{\partial A}{\partial u'}} = \dfrac{A_0}{A} = a_0, \\ \dfrac{\sum Q\dfrac{\partial P}{\partial u'}}{\sum Q\dfrac{\partial Q}{\partial u}} = \dfrac{QS_1 + Q'S'_1 + Q''S''_1}{QS + Q'S' + Q''S''} = \dfrac{A'_0\dfrac{\partial A'}{\partial u}}{A'\dfrac{\partial A'}{\partial u}} = \dfrac{A'_0}{A'} = a'_0. \end{cases}$$

Il suit de là que, pour que les rapports a_0, a'_0 cessent d'être des fonctions connues de u, u' et deviennent *constants*, il faut et il suffit que l'on ait

$$(49)\qquad \frac{S}{S_1} = \frac{S'}{S'_1} = \frac{S''}{S''_1} = a_0 = \frac{1}{a'_0},$$

ce qui entraîne

$$(49')\qquad a_0 a'_0 = 1.$$

Telles sont les hypothèses que nous allons adopter désormais. En premier lieu, si on les introduit dans les formules (47), on en déduira celles-ci

$$(50)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial A}{\partial u'} = \dfrac{AA'}{\sin\Phi}(a'_0 n - r'\cos\Phi), \\ \dfrac{\partial A'}{\partial u} = \dfrac{AA'}{\sin\Phi}(a_0 r' - n\cos\Phi), \end{cases}$$

lesquelles portées ensuite dans le système (43) où l'on aura développé les dérivées des premiers membres, le transforment de la façon suivante:

$$(51)\quad\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{1}{A'}\frac{\partial p}{\partial u'}-\frac{1}{A}\frac{\partial p'}{\partial u}\right)\sin\Phi=(a'_0pn+a_0p'r')\\&\qquad\qquad+(qn'-nq')-p'(n+r)\cos\Phi,\\&\left(\frac{1}{A'}\frac{\partial q}{\partial u'}-\frac{1}{A}\frac{\partial q'}{\partial u}\right)\sin\Phi=(a'_0qn+a_0q'r')\\&\qquad\qquad+(rp'-pr')-q(n'+r')\cos\Phi,\\&\left(\frac{1}{A'}\frac{\partial r}{\partial u'}-\frac{1}{A}\frac{\partial r'}{\partial u}\right)\sin\Phi=(a'_0rn+a_0r'^2)\\&\qquad\qquad+(pq'-qp')\sin^2\Phi-r'(n+r)\cos\Phi.\end{aligned}\right.$$

A l'exemple du système (43) dont il dérive, ce dernier convient: 1° aux pseudo-surfaces qui satisfont à la condition (49′); 2° aux néo-surfaces qui, à cette condition, ajoutent cette autre: $p=-q'$; 3° aux surfaces usuelles qui satisfont aux précédentes, plus encore à ces deux-ci: $a_0=a'_0=1$.

Comme on devait s'y attendre, ce troisième cas nous ramène très exactement au système (9) des *Nouvelles Annales* (1900, p. 51).

Quant au corrélatif du système (51), on le déduirait, par des calculs tout pareils aux précédents, de (43′); mais nous ne nous y arrêterons pas.

IV.

Deux cas particuliers remarquables du système ternaire précédent. — Élément linéaire-représentatif de *Weingarten*, généralisé.

12. Supposons les lignes coordonnées (s), (s') rectangulaires. Les deux systèmes (43) et (43′) se confondront en un seul qui sera

$$(52)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial u'}(Ap)-\frac{\partial}{\partial u}(A'p')=AA'(qr'-rq'),\\&\frac{\partial}{\partial u'}(Aq)-\frac{\partial}{\partial u}(A'q')=AA'(rp'-pr'),\\&\frac{\partial}{\partial u'}(Ar)-\frac{\partial}{\partial u}(A'r')=AA'(pq'-qp'),\end{aligned}\right.$$

avec cette remarque (47) qu'actuellement

$$(53)\quad\left\{\begin{aligned}&Ar=-\frac{1}{A'}\frac{A_0}{A}\frac{\partial A}{\partial u'}=-\frac{a_0}{A'}\frac{\partial A}{\partial u'},\\&A'r'=\frac{1}{A}\frac{A'_0}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u}=\frac{a'_0}{A}\frac{\partial A'}{\partial u},\end{aligned}\right.$$

a_0, a'_0 étant, tout d'abord, des fonctions connues de u et de u'.

De son côté, le système (51) se réduira à cet autre:

$$(54)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{A'}\dfrac{\partial p}{\partial u'} - \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial p'}{\partial u} = (a'_0 p r + a_0 p' r') + (q r' - r q'), \\ \dfrac{1}{A'}\dfrac{\partial q}{\partial u'} - \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial q'}{\partial u} = (a'_0 q r + a_0 q' r') + (r p' - p r'), \\ \dfrac{1}{A'}\dfrac{\partial r}{\partial u'} - \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial r'}{\partial u} = (a'_0 r^2 + a_0 r'^2) + (p q' - q p'), \end{cases}$$

a_0, a'_0 étant ici supposés, à nouveau, *constants* (n° 11).

Faisons une double application de ces formules, mais avec un choix d'axes rectangulaires différent pour les deux cas.

13. I. — Néo-surfaces rapportées à leurs lignes de courbure. — Pour qu'une néo-surface soit rapportée à ses lignes de courbure, il faut et il suffit que l'on ait: $p = 0$, $-q' = 0$. Effectivement, son indicatrice (I) savoir:

$$(55)\qquad -qX^2 + (p - q')XY + p'Y^2 = 1,$$

se réduit alors à

$$(55')\qquad \frac{X^2}{\mathrm{R}} + \frac{Y^2}{\mathrm{R}'} = 1,$$

en ayant soin de poser

$$(56)\qquad -q = \frac{1}{\mathrm{R}}, \qquad p' = \frac{1}{\mathrm{R}'}.$$

En introduisant la double hypothèse: $p = -q' = 0$, dans le système (52), il se réduit à

$$(52')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}(A'p') = -Aq.A'r', \\ \dfrac{\partial}{\partial u'}(Aq) = Ar.A'p', \\ \dfrac{\partial}{\partial u'}(Ar) - \dfrac{\partial}{\partial u}(A'r') = -Aq.A'p', \end{cases}$$

en même temps que des deux premières équations du système (54) on tire

$$r = \frac{\dfrac{1}{A'}\dfrac{\partial q}{\partial u'}}{a'_0 q + p'}, \qquad r' = -\frac{\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial p'}{\partial u}}{q + a_0 p'}.$$

Il s'en suit qu'en supposant satisfaite la condition $a_0 a'_0 = 1$, on peut, pour les néo-surfaces correspondantes F_{a, a_0}, ou simplement F_{a_0}, écrire

les relations de proportionnalité :

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\frac{\partial}{\partial u'}(Aq)}{Aq} &= \frac{p'}{q}\frac{\frac{\partial q}{\partial u'}}{a'_0 q + p'} = \frac{a_0\frac{\partial R}{\partial u'}}{R' - a_0 R},\\ \frac{\frac{\partial}{\partial u}(A'p')}{A'p'} &= \frac{q}{p'}\frac{\frac{\partial p'}{\partial u}}{q + a_0 p'} = \frac{-\frac{\partial R'}{\partial u}}{R' - a_0 R}.\end{aligned}\right.$$

Intégrant, dans l'hypothèse que R′ soit fonction de R, on aura

$$(58)\qquad Aq = \mathrm{U}e^{\int\frac{a_0 dR}{R' - a_0 R}}, \qquad A'p' = \mathrm{U}'e^{-\int\frac{dR'}{R' - a_0 R}},$$

U et U′ étant des fonctions, la première de u, la deuxième de u' et que nous admettrons, selon l'usage, pouvoir être toujours réduites à *l'unité*. Or si, dans ce cas (exclusif), on pose

$$(59)\qquad a_0 R = \varphi(\lambda), \qquad R' = \varphi(\lambda) - \lambda\varphi'(\lambda),$$

en désignant par λ une variable auxiliaire, les formules (58) se réduiront à

$$(60)\qquad Aq = -\frac{A}{R} = \frac{1}{\lambda}, \qquad A'p' = \frac{A'}{R'} = \frac{1}{\varphi'(\lambda)},$$

et l'on constate, fait bien important, que celles-ci sont indépendantes de a_0.

Cela posé, de (52′) on tire

$$Ar = \frac{\frac{\partial}{\partial u'}(Aq)}{A'p'}, \qquad A'r' = -\frac{\frac{\partial}{\partial u}(A'p')}{Aq}.$$

Substituant à Aq et à $A'p'$ les valeurs ci-dessus et portant le tout dans la dernière des équations (52′), elle devient (par l'interversion convenable de ses premiers termes) :

$$(61)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda\varphi''}{\varphi'^2}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{\varphi'}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial u'}\right) - \frac{1}{\lambda\varphi} = 0.$$

Étant indépendante, elle aussi, de la constante a_0, on en conclut qu'elle définit également bien, et des *surfaces ordinaires*, et des *néo-surfaces, de la variété* F_{a_0}.

14. α. Avant de passer outre, il importe d'observer que la représentation sphérique $d\Sigma$ de l'élément dS (30) peut, eu égard aux relations

(12'), s'écrire

$$(62)\quad \begin{cases} d\Sigma^2 = (Ap\,du + A'p'\,du')^2 + (Aq\,du + A'q'\,du')^2 \\ \qquad + 2(Ap\,du + A'p'\,du')(Aq\,du + A'q'\,du')\cos\Phi. \end{cases}$$

Elle se réduit donc, dans la question présente, à

$$(62')\qquad d\Sigma^2 = A^2q^2du^2 + A'^2p'^2du'^2 = \frac{du^2}{\lambda^2} + \frac{du'^2}{\varphi'^2(\lambda)}.$$

Comme, à son tour, cette formule est indépendante de a_0, rapprochée de l'équation (61), elle nous montre que la *recherche des néo-surfaces* F_{a_0} *ou des surfaces F pour lesquelles les rayons de courbure* R, R' *sont fonction l'un de l'autre, revient à celle des même lieux pour lesquels* (sous une notation équivalente) on a

$$d\Sigma^2 = \beta\,du^2 + \psi(\beta)\,du'^2.$$

Or ceci est une première généralisation de ce que, en cette matière, mais pour les surfaces usuelles, exclusivement, on nomme le « théorème de Weingarten ».

β. En ce qui concerne la courbure totale de nos néo-surfaces, on observera que l'expression générale de cette courbure, à savoir :

$$(63)\qquad K'' = pq' - qp' = \frac{DD' - D''D''_1}{H^4},$$

se réduit, pour elles, à cause de $D'' = D''_1 = 0$ et de $B'' = 0$, à

$$(63')\qquad K'' = -qp' = \frac{DD'}{A^4A'^4}.$$

Nous reviendrons, dans la suite, sur ce dernier résultat, déjà mentionné d'ailleurs, au n° 6.

15. II. — Pseudo-surfaces minima rapportées à leurs lignes asymptotiques. — Il ne sera question, encore ici, que de la variété de celles qui satisfont à la condition $a_0a'_0 = 1$. Nous les désignerons par F_{μ,a_0} ou, en abrégeant, par F_{a_0}.

Et d'abord, à la conique indicatrice (I) opposons la nouvelle conique indicatrice (I_1) corrélative de la première, celle-là même que nous avons utilisée, une première fois, dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* (1898, p. 121), à savoir :

$$(64)\qquad pX^2 + (q + p')XY + q'Y^2 = 1.$$

Si l'on y fait $q = 0$, $p' = 0$, ce qui, par parenthèse, transforme la première conique (Γ) en hyperbole équilatère, et par suite, la pseudo-surface **F** en la pseudo-surface minima, F_μ, il viendra simplement

$$(64')\qquad \frac{X^2}{R_1} + \frac{Y^2}{R'_1} = 1,$$

à condition de poser

$$(65)\qquad p = \frac{1}{R_1}, \qquad q' = \frac{1}{R'_1}.$$

Introduisons les conditions précédentes $q = p' = 0$, dans le système (52); il se réduira à

$$(52'')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u'}(Ap) &= -Ar.A'q',\\ \frac{\partial}{\partial u}(A'q') &= Ap.A'r',\\ \frac{\partial}{\partial u'}(Ar) - \frac{\partial}{\partial u}(A'r') &= Ap.A'q', \end{aligned}\right.$$

pendant que les deux premières équations du système (54) nous donneront

$$r = \frac{\frac{1}{A'}\frac{\partial p}{\partial u'}}{a'_0 p - q'}, \qquad r' = -\frac{\frac{1}{A}\frac{\partial q'}{\partial u}}{p - a_0 q'}.$$

Supposons, maintenant, la condition $a_0 a'_0 = 1$ remplie, ce qui transforme F_μ en F_{a_0}; on pourra écrire les deux suites

$$(66)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\frac{\partial}{\partial u'}(Ap)}{Ap} &= -\frac{q'}{p}\frac{\frac{\partial p}{\partial u'}}{a'_0 p - q'} = \frac{a_0\frac{\partial R_1}{\partial u'}}{R'_1 - a_0 R_1},\\ \frac{\frac{\partial}{\partial u}(A'q')}{A'q'} &= \frac{p}{q'}\frac{\frac{\partial q'}{\partial u}}{p - a_0 q'} = \frac{-\frac{\partial R_1}{\partial u}}{R'_1 - a_0 R_1}. \end{aligned}\right.$$

Que si l'on y considère R'_1 comme fonction de R_1, on aura, en intégrant :

$$(67)\qquad Ap = U_1 e^{\int \frac{a_0 dR_1}{R'_1 - a_0 R_1}}, \qquad A'q' = U'_1 e^{-\int \frac{dR'_1}{R'_1 - a_0 R_1}},$$

les fonctions U_1, U'_1 pouvant, à leur tour, être réduites à l'unité. Po-

sant alors, en conséquence,

$$(68) \qquad a_0 R_1 = \varphi(\mu), \qquad R_1' = \varphi(\mu) - \mu\varphi'(\mu),$$

où μ désigne une nouvelle variable auxiliaire, les formules (67) deviendront

$$(69) \qquad Ap = \frac{A}{R_1} = \frac{1}{\mu}, \qquad A'q' = \frac{A'}{R_1'} = \frac{1}{\varphi'(\mu)};$$

d'où l'on voit que, elles aussi, sont indépendantes de a_0.

Ceci reconnu, du système (52″) on tire

$$Ar = -\frac{\frac{\partial}{\partial u'}(Ap)}{A'q'}, \qquad A'r' = \frac{\frac{\partial}{\partial u}(A'q')}{Ap};$$

ce qui, substitué dans la troisième de ses équations, permet, eu égard à (69), de lui donner la forme

$$(70) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu\varphi''}{\varphi'^2}\frac{\partial\mu}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{\varphi'}{\mu^2}\frac{\partial\mu}{\partial u'}\right) - \frac{1}{\mu.\varphi'} = 0.$$

Comparée à (61), on constate qu'elle n'en diffère que par la *notation.* Étant donc, comme elle, indépendante de a_0, on en conclut que le type d'équation aux dérivées partielles qui nous occupe, définit, à la fois, et des *surfaces ordinaires* et des *néo-surfaces* et des *pseudo-surfaces minima.* (*Voir* l'AVANT-PROPOS).

16. α_1. Arrêtons-nous à la représentation sphérique $d\Sigma$ de l'élément linéaire dS résultant des deux lignes asymptotiques rectangulaires auxquelles nos pseudo-surfaces F_{a_0} se trouvent actuellement rapportées. Si, dans la formule générale, (62), on pose $q = p' = 0$, elle se réduira à

$$(62'') \qquad d\Sigma^2 = A^2p^2du^2 + A'^2q'^2du'^2 = \frac{du^2}{\mu^2} + \frac{du'^2}{\varphi'^2(\mu)},$$

expression indépendante à son tour de a_0 et qui, de ce fait, constitue une *deuxième généralisation* du « théorème » y-relatif de WEINGARTEN.

β_1. Quant à la courbure totale, son expression générale (63) se réduit, à cause de $D = D' = 0$ et $B'' = 0$, à

$$(63'') \qquad K'' = pq' = -\frac{D''D_1''}{A^4A'^4},$$

formule bien différente, au fond, de son analogue (63′).

V.

Équation aux dérivées partielles, definissant indifféremment des surfaces ordinaires, des néo-surfaces, ou des pseudo-surfaces (minima) à courbure totale constante.

17. I. — Cas où la courbure totale est négative. — 1° Supposons qu'il s'agisse des néo-surfaces F_{a_0} (n° 13). En mettant devant la *constante* a_0 le signe — en évidence, on aura, par hypothèse:

(71) $$RR' = -\frac{1}{a_0}, \quad \text{ou bien} \quad a_0 RR' = -1.$$

Or, pour satisfaire à cette seconde égalité, il suffit (59) de prendre

(72) $$\begin{cases} a_0 R = \varphi(\lambda) = -\cot\omega, \\ R' = \varphi(\lambda) - \lambda\varphi'(\lambda) = \operatorname{tg}\omega. \end{cases}$$

De là, on déduit:

$$\lambda\varphi'(\lambda) = -\frac{1}{\sin\omega\cos\omega}, \qquad \varphi'(\lambda)\frac{d\lambda}{d\omega} = \frac{1}{\sin^2\omega},$$

et, par suite,

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\cot\omega\, d\omega, \qquad \lambda = \frac{1}{\sin\omega}, \quad \varphi'(\lambda) = -\frac{1}{\cos\omega}.$$

D'après (60), on aura donc

$$Aq = \frac{1}{\lambda} = \sin\omega, \qquad A'p' = \frac{1}{\varphi'(\lambda)} = -\cos\omega;$$

d'où l'on conclut

$$Ar = -\frac{\partial\omega}{\partial u'}, \qquad A'r' = -\frac{\partial\omega}{\partial u};$$

puis, en remontant, de préférence, à la forme (52'):

(73) $$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial u'^2} = -\sin\omega\cos\omega.$$

C'est l'équation aux dérivées partielles cherchée. Elle ne diffère en rien de celle qui concerne les surfaces usuelles (c'est-à-dire le cas où $a_0 = 1$). La raison en est que l'équation (61) qui aurait pu servir à la calculer, ne contenant pas la fonction φ, elle-même, mais seulement ses dérivées φ' et φ'', il a été loisible, de poser, dès le début $a_0 R = \varphi(\lambda)$, au lieu de $R = \varphi(\lambda)$.

En guise de corollaire, on tire des calculs qui précèdent

$$A = \frac{1}{q\lambda} = -\frac{R}{\lambda} = \frac{\cot\omega}{a_0\lambda} = \frac{\cos\omega}{a_0},$$

$$A' = \frac{1}{p'\varphi'(\lambda)} = \frac{R'}{\varphi'(\lambda)} = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\varphi'(\lambda)} = -\sin\omega;$$

d'où l'on conclut, notamment,

$$(74)\qquad \begin{cases} dS^2 = \dfrac{\cos^2\omega}{a_0^2}du^2 + \sin^2\omega\, du'^2, \\ d\Sigma^2 = \sin^2\omega\, du^2 + \cos^2\omega\, du'^2. \end{cases}$$

2° Considérons maintenant la variété des pseudo-surfaces minima F_{a_0}. On aura pour elles (n° 15):

$$(71')\qquad R_1R_1' = -\frac{1}{a_0} \quad \text{ou bien} \quad a_0R_1R_1' = -1,$$

avec

$$(72')\qquad \begin{cases} a_0R_1 = \varphi(\mu) = -\cot\omega, \\ R_1' = \varphi(\mu) - \mu\varphi'(\mu) = \operatorname{tg}\omega. \end{cases}$$

Rien ne changera donc dans les premiers calculs, en sorte qu'on peut écrire

$$Ap = \frac{1}{\mu} = \sin\omega, \qquad A'q' = \frac{1}{\varphi'(\mu)} = -\cos\omega.$$

Quant aux valeurs actuelles de Ar et $A'r'$, elles sont

$$Ar = \frac{\partial\omega}{\partial u'}, \qquad A'r' = \frac{\partial\omega}{\partial u}.$$

Substituant dans la troisième des équations (52''), on en tire

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial u'^2} = \sin\omega\cos\omega;$$

ce qui ne diffère, que par le signe du second membre, de l'équation (73), particularité qui ne suffit pas, évidemment, pour constituer une solution *nouvelle*.

De ces derniers calculs, on déduit:

$$A = \frac{1}{p\mu} = \frac{R_1}{\mu} = \frac{-\cot\omega}{a_0\mu} = -\frac{\cos\omega}{a_0},$$

$$A' = \frac{1}{q'\varphi'(\mu)} = \frac{R_1'}{\varphi'(\mu)} = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\varphi'(\mu)} = -\sin\omega,$$

valeurs qui entrainent pour dS^2 et $d\Sigma^2$ des expressions *identiques* à celles obtenues dans le premier cas.

18. II. — Cas où la courbure totale est positive. — Sans employer artificiellement ici, comme on a coûtume de le faire, les *imaginaires*, procédons simplement, puisque la chose est possible, à l'instar du premier cas.

1° Revenons, à cet effet, à nos néo-surfaces F_{a_0}. Nous poserons, en conséquence,

$$(75) \qquad RR' = \frac{1}{a_0} \quad \text{ou} \quad a_0 RR' = 1,$$

conjointement avec

$$(76) \qquad \begin{cases} a_0 R = \varphi(\lambda) = \cot\omega, \\ R' = \varphi(\lambda) - \lambda\varphi'(\lambda) = \operatorname{tg}\omega. \end{cases}$$

De ce système on tire:

$$\lambda\varphi'(\lambda) = \frac{\cos 2\omega}{\sin\omega\cos\omega}, \qquad \varphi'(\lambda)\frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{1}{\sin^2\omega},$$

et, par suite,

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{\cos\omega\, d\omega}{\sin\omega\cos 2\omega} = -\frac{(1+\cos 2\omega)\,d\omega}{\sin 2\omega\cos 2\omega},$$

ou bien

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{2\,d\omega}{\sin 4\omega} - \frac{d\omega}{\sin 2\omega}.$$

En intégrant cette expression, et négligeant la constante, on trouve

$$\lambda = \frac{\sqrt{\cos 2\omega}}{\sqrt{2}\sin\omega}.$$

On en conclut

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{\sqrt{2}\sin^2\omega}{\cos\omega}\sqrt{\cos 2\omega},$$

$$\varphi'(\lambda) = -\frac{1}{\sin^2\omega}\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\omega}\sqrt{\cos 2\omega}.$$

Cela posé, il suit des formules (60) que l'on a actuellement

$$Aq = \frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{2}\sin\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}, \qquad A'p' = \frac{1}{\varphi'(\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\cos\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}.$$

Et comme, d'autre part:

$$Ar = \frac{2}{\cos 2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u'}, \qquad A'r' = \frac{\frac{1}{2}}{\cos 2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u},$$

la substitution de ces valeurs dans la troisième des équations (52') lui

fait prendre la forme, objet de nos recherches :

$$(77) \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\cos 2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{2}{\cos 2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u'}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\omega=0.$$

Complétons ceci par le calcul de dS^2 et de $d\Sigma^2$. Il vient d'abord

$$A=\frac{1}{q\lambda}=-\frac{R}{\lambda}=\frac{-\cot\omega}{a_0\lambda}=-\frac{\sqrt{2}}{a_0}\frac{\cos\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}},$$

$$A'=\frac{1}{p'\varphi'(\lambda)}=\frac{R'}{\varphi'(\lambda)}=\frac{\operatorname{tg}\omega}{\varphi'(\lambda)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}};$$

d'où, les expressions cherchées :

$$(78) \quad \begin{cases} dS^2=\dfrac{2\cos^2\omega}{a_0^2\cos 2\omega}du^2+\dfrac{\sin^2\omega}{2\cos 2\omega}du'^2, \\ d\Sigma^2=\dfrac{2\sin^2\omega}{\cos 2\omega}du^2+\dfrac{\cos^2\omega}{2\cos 2\omega}du'^2. \end{cases}$$

On remarque, à nouveau, que, dans ces formules, comme du reste dans leurs analogues (74), a_0 ne figure pas dans la *seconde* des deux groupes.

Mais il y a plus : chose bizarre, à première vue : aucune d'elles ne convient à la *sphère*, dont la courbure totale est pourtant constante et positive. En effet pour celle-ci on a, avec $a_0=1$,

$$R=R'=\operatorname{tg}\omega=\cot\omega=1;$$

d'où l'on déduit $\cot 2\omega=0$, ce qui rend *illusoires* les valeurs (78). — On sera moins surpris de ce résultat si l'on observe que nos calculs actuels dépendent des exponentielles (58). Or les hypothèses précédentes y rendent complètement indéterminés les rapports $\frac{dR}{R'-R}$ et $\frac{dR'}{R'-R}$.

2° Si nous passons aux pseudo-surfaces minima $\mathbf{F}_{a_0}$, nous devrons poser

$$(75') \quad R_1R'_1=\frac{1}{a_0} \quad \text{ou} \quad a_0R_1R'_1=1,$$

avec

$$(76') \quad \begin{cases} a_0R_1=\varphi(\mu)=\cot\omega, \\ R'_1=\varphi(\mu)-\mu\varphi'(\mu)=\operatorname{tg}\omega. \end{cases}$$

Par un calcul, de tout point pareil à celui qui précède, on arrive à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\cos 2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{2}{\cos 2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u'}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\omega=0,$$

qui, d'elle-même, nous reporte à (77), puis, finalement, aux *mêmes* valeurs de dS^2 et de $d\Sigma^2$ que celles obtenues plus haut.

VI.

Insuffisance du théorème de *Beltrami*, relatif aux surfaces à courbure totale constante. — Introduction des pseudo-surfaces développables.

19. Essai de généralisation du théorème précité. — Nous rappelons, comme prélude (*E.*, n° 3), que trois équations différentielles ne sont pas indispensables pour représenter une pseudo-surface. Une seule équation différentielle totale, à deux variables et non intégrable suffit pour cela. Exemple :

(79) $$dt = M\,du + N\,du'.$$

Cela dit, on n'ignore pas que le théorème de Beltrami, auquel il est fait allusion ci-dessus, consiste en ce que : les seules surfaces (ordinaires) dont les lignes géodésiques admettent pour perspective sur un plan les diverses droites de ce plan, sont les surfaces à *courbure totale constante*.

Examinons, s'il est possible, d'étendre ce théorème aux pseudo-surfaces, ce qui, le cas échéant, élargirait, on le conçoit, dans de notables proportions, le champ d'études que le dit théorème a indirectement et très inopinément ouvert à la nouvelle géométrie.

Pour les néo-surfaces, nous les laisserons ici de coté, par ce que le mode de calcul, basé sur l'équation *unique* (79), que *l'analogie* nous impose, les exclut forcément.

Cette réserve faite, remontons à l'équation générale des lignes géodésiques (27) et rapportons-la à une famille de ces lignes et à leurs trajectoires orthogonales. Il suffira pour cela de poser :

$$A^2 = 1, \qquad B'' = 0.$$

Prenant ensuite u pour variable indépendante, et faisant, pour abréger, $\frac{du'}{du} = v'$, cette équation se réduira à la suivante :

(80) $$v'' = -\frac{A'_0 + A'}{A'^2}\frac{\partial A'}{\partial u}v' - \frac{1}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u'}v'^2 - A'_0\frac{\partial A'}{\partial u}v'^3.$$

Choisissons maintenant pour plan du Tableau celui des xy, et soit

$$fx + gy + h = 0$$

la perspective, sur ce dernier plan, de la géodésique considérée. Si (t, u') désignent les coordonnées curvilignes du point qui, sur la pseudo-surface, correspond au point (x, y) du plan choisi, on aura, par hypothèse :

$$f\,dt + g\,du' = 0,$$

ou bien, d'après (79),

$$f(M\,du + N\,du') + g\,du' = 0.$$

Éliminant le rapport $\frac{f}{g}$ entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à u, il vient

$$v''(M + Nv') - v'\frac{d}{du}(M + Nv') = 0,$$

c'est-à-dire

$$(80') \quad v'' = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial u}v' + \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial u'} + \frac{\partial N}{\partial u}\right)v'^2 + \frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial u'}v'^3.$$

Or, d'après le problème, ceci ne peut être qu'une seconde forme de l'équation (80). Si donc on les identifie, on aura :

$$(81) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{M}\dfrac{\partial M}{\partial u} = -\dfrac{A'_0 + A'}{A'^2}\dfrac{\partial A'}{\partial u}, \\ \dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial M}{\partial u'} + \dfrac{\partial N}{\partial u}\right) = -\dfrac{1}{A'}\dfrac{\partial A'}{\partial u'}, \\ \dfrac{1}{M}\dfrac{\partial N}{\partial u'} = -A'_0\dfrac{\partial A'}{\partial u}. \end{cases}$$

Avant d'en rien conclure, arrêtons-nous au cas particulier où l'on aurait: $\frac{\partial M}{\partial u'} = \frac{\partial N}{\partial u}$, ce qui rend intégrable l'équation (79). La pseudo-surface donnée se transforme alors en surface, et l'on pourra poser convenablement, avec $M = p$, $N = q$,

$$\frac{\partial M}{\partial u} = r, \quad \frac{\partial M}{\partial u'} = \frac{\partial N}{\partial u} = s, \quad \frac{\partial N}{\partial u'} = t,$$

en sorte que, eu égard à $A'_0 = A'$, les conditions (81) deviendront

$$(81') \quad \frac{r}{p} = -\frac{2}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u}, \quad \frac{2s}{p} = -\frac{1}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u'}, \quad \frac{t}{p} = -A'\frac{\partial A'}{\partial u},$$

système bien connu, que l'on sait être intégrable. C'est de lui, en effet, qu'on se sert couramment pour démontrer le théorème de Beltrami. — Mais revenons au système général (81).

Est-il intégrable, lui aussi? Non, assurément, et cela pour cette raison majeure: qu'il contient une fonction surabondante; la fonction A'_0. — Au reste, le serait-il, qu'il ne conduirait pas à mettre en

évidence, comme il le faudrait pourtant (en raisonnant, *à pari*), les *pseudo-surfaces à courbure totale constante.* On sait, en effet, que ce qui assure le succès final de la démonstration du théorème de BELTRAMI, c'est que, dans le système de coordonnées adopté, la courbure totale de la surface s'exprime par la formule suivante due à GAUSS

$$K'' = \frac{1}{RR'} = -\frac{1}{A'}\frac{\partial^2 A'}{\partial u^2}.$$

Or, présentement, on n'a plus, comme on le sait: $K'' = \frac{1}{\mathbf{R}\mathbf{R}'}$, en désignant par $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}'$ les rayons principaux de la pseudo-surface considérée. En second lieu, le dernier membre doit être remplacé (n° 12) par l'expression bien différente

$$-\frac{1}{A'}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A'_0}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u}\right),$$

laquelle contient, elle aussi, la fonction A'_0.

Concluons de là que le théorème de BELTRAMI ne saurait être étendu aux pseudo-surfaces. Et comme, d'autre part, la distinction des surfaces à courbure totale constante, positive ou négative, constitue précisément la base analytique de la géométrie non euclidienne, on voit (d'une première façon), sans qu'il soit besoin d'insister, tout ce qu'une pareille base a de précaire et *d'insuffisant*, selon le titre même de ce Mémoire.

20. DISTINCTION ENTRE LA COURBURE TOTALE ET LA PSEUDO-COURBURE TOTALE D'UNE PSEUDO-SURFACE.—APPLICATION AUX PSEUDO-SURFACES DÉVELOPPABLES. — C'est pour conserver l'analogie sous un certain rapport (tout en la blessant, avouons-le, sous un autre) que nous avons qualifié de *courbure totale* d'une pseudo-surface l'expression

$$K'' = \frac{DD' - D''D''_1}{H^4}. \tag{82}$$

Cela nous oblige à nommer *pseudo-courbure totale* la suivante:

$$\mathbf{K}'' = \frac{DD' - \frac{1}{4}(D'' + D''_1)^2}{H^4}, \tag{83}$$

expression qui coïncide avec la première pour $D'' = D''_1$, c'est-à-dire quand la pseudo-surface se change en surface.

La genèse de K'' nous est connue (n° 14). Cherchons celle de $\mathbf{K}''$. Pour y parvenir, nous rappelons que, dans le cas le plus général,

l'indicatrice (I) d'une pseudo-surface peut s'écrire

$$(84)\qquad \frac{D}{A^2}X^2+\frac{D''+D''_1}{AA'}XY+\frac{D'}{A'^2}Y^2=H.$$

On en déduit pour l'équation aux demi-axes, c'est-à-dire aux rayons principaux de courbure, en un point donné du lieu

$$(85)\ \left[DD'-\tfrac{1}{4}(D''+D''_1)^2\right]\mathbf{R}^2-[A'^2D+A^2D'-B''(D''+D''_1)]\mathbf{R}+H^4=0;$$

d'où, notamment :

$$(86)\qquad \frac{1}{\mathbf{RR'}}=\frac{DD'-\frac{1}{4}(D''+D''_1)^2}{H^4}=\mathbf{K}''.$$

Ainsi $\mathbf{K}''$ (et non plus K'') n'est autre que l'inverse du produit des racines de l'équation (85).

Pour que sa valeur soit *nulle*, il faut et il suffit que l'un des deux rayons principaux $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}'$ soit infini. La conique (84) dégénère alors en un système de *droites parallèles*, dont l'équation peut s'écrire

$$\frac{D}{A}X+\frac{\frac{1}{2}(D''+D''_1)}{A'}Y=\pm\sqrt{DH},$$

ou bien

$$\frac{\frac{1}{2}(D''+D''_1)}{A}X+\frac{D'}{A'}Y=\pm\sqrt{D'H}.$$

En conséquence, nous conviendrons d'appeler pseudo-surface *développable* toute pseudo-surface telle qu'en chacun de ses points sa pseudo-courbure totale $\mathbf{K}''$ est nulle. On n'aurait plus qu'une pseudo-surface *réglée*, si le rayon de courbure infini, en chaque point, n'était pas un rayon *principal*, la *génératrice* étant simple dans ce second cas, et double dans le premier.

Lorsque c'est, au contraire, la courbure totale K'' qui est nulle, l'indicatrice (84) devient *l'hyperbole* :

$$(84')\qquad \left(\frac{D}{A}X+\frac{D''}{A'}Y\right)\left(\frac{D}{A}X+\frac{D''_1}{A}Y\right)=DH,$$

et ne dégénère en deux droites parallèles :

$$\frac{D}{A}X+\frac{D''}{A'}Y=\pm\sqrt{DH},$$

ou bien

$$\frac{D''}{A}X+\frac{D'}{A'}Y=\pm\sqrt{D'H},$$

que si $D''=D''_1$, ce qui nous ramène aux surfaces.

Signalons, en dernier lieu, un cas exceptionnellement remarquable, sur lequel nous aurons du reste à revenir plus tard (II, § V).

Lorqu'on a à la fois

$$D = 0, \qquad D'' + D''_1 = 0, \qquad D' = 0,$$

l'indicatrice (84) est rejetée à l'infini, tandis que les équations des ombilics (*E.*, n° 12):

$$\frac{D}{A^2} = \frac{D'' + D''_1}{2B''} = \frac{D'}{A'^2},$$

sont identiquement satisfaites en chaque point du lieu. L'équation aux rayons principaux (85) admet alors deux racines infinies. Par suite, la pseudo-courbure totale $\mathbf{K}''$ devient nulle, tandis que la courbure totale K'' a pour valeur

$$K'' = \frac{D''^2}{H^4}.$$

C'est, comme on le verra dans la suite (n° 39), le cas du ***pseudo-plan***, pseudo-surface à la fois, ombilicale, minima et, à double titre, développable.

21. Cas d'une classe particulière de pseudo-surfaces développables. — Considérons les pseudo-surfaces représentées par le système:

$$(87) \quad \begin{cases} dx = P\,du + Q\,du' = P\,du + \left(N - \dfrac{\partial P}{\partial u'}u\right)du', \\ dy = P'\,du + Q'\,du' = P'\,du + \left(N' - \dfrac{\partial P'}{\partial u'}u\right)du', \\ dz = P''\,du + Q''\,du' = P''\,du + \left(N'' - \dfrac{\partial P''}{\partial u'}u\right)du', \end{cases}$$

où P, N, P', ... désignent des fonctions de u' seulement. Je dis qu'à l'aide d'une transformation préliminaire convenable, ce système est propre à représenter toute une classe de pseudo-surfaces développables. Posons, en effet,

$$\sum P^2 = 1, \qquad \sum PQ = 0,$$

d'où l'on peut déduire aussitôt

$$(88) \qquad \sum P\frac{\partial P}{\partial u'} = 0, \qquad \sum PN = 0.$$

L'élément linéaire prenant alors la forme

$$dS^2 = du^2 + M\,du'^2,$$

les pseudo-surfaces données se trouvent par là-même rapportées à un système de lignes géodésiques et à leurs trajectoires orthogonales (n° 19).

Cela posé, formons les déterminants D, D'', D''_1. On voit d'abord qu'à cause de $\sum P\frac{\partial P}{\partial u} = 0$, le premier est nul. Quant au second, de ce qu'on a, par supposition, $\frac{\partial Q}{\partial u} = -\frac{\partial P}{\partial u'}$, on peut l'écrire

$$D'' = \begin{vmatrix} -\frac{\partial P}{\partial u'} & P & N - \frac{\partial P}{\partial u'} \\ -\frac{\partial P'}{\partial u'} & P' & N' - \frac{\partial P'}{\partial u'} \\ -\frac{\partial P''}{\partial u'} & P'' & N'' - \frac{\partial P''}{\partial u'} \end{vmatrix}.$$

Or on aperçoit immédiatement que le troisième D''_1 ne diffère de celui-ci que par les signes des éléments de la première colonne. On a donc $D'' + D''_1 = 0$; d'où il résulte que la condition

$$\mathsf{K}'' = \frac{DD' - \frac{1}{4}(D'' + D''_1)^2}{H^4} = 0,$$

se trouvant identiquement vérifiée, nos pseudo-surfaces sont, par définition (n° 20), développables. C. Q. F. D.

22. Parmi les nombreuses conséquences que l'on peut déduire de cette propriété, nous nous bornerons à signaler les suivantes:

1° Calculée directement, l'équation des lignes géodésiques revient à

$$v'' = -\frac{1}{A}\frac{\partial A'}{\partial u'}v'^2 + A'\frac{\partial A'}{\partial u}v'^3.$$

En la comparant à l'équation plus générale (80), on voit que l'on a ici $A'_0 = -A'$. Il s'en suit que la courbure totale a pour expression

$$K'' = -\frac{1}{A'}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A'_0}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u}\right) = \frac{1}{A'}\frac{\partial^2 A'}{\partial u^2}.$$

Or si l'on remonte (n° 19) à l'expression de celle de Gauss, sur laquelle repose la démonstration du théorème de Beltrami, on constate qu'entre le cas des surfaces ordinaires et celui qui nous occupe, il n'y a qu'un signe de changé.

2° Si, dans les équations (87) on remplace les trois signes — par

des signes $+$, le système tout entier devient intégrable. C'est qu'alors il représente la classe des *surfaces réglées* dont les génératrices ont pour équation

$$\frac{x-\int N\,du'}{P}=\frac{y-\int N'\,du'}{P'}=\frac{z-\int N''\,du'}{P''},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{x-x_0}{P}=\frac{y-y_0}{P'}=\frac{z-z_0}{P''}.$$

3° Supposons enfin que l'on ait $D''=0$, $D''_1=0$. Nous tombons, de ce fait, dans le cas des surfaces usuelles. Or, des formules initiales : $\sum P^2=1$, $\sum PQ=0$ et de leurs conséquences (88), on tire aisément :

$$(89)\quad \left\{\begin{aligned} D''&=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P'}{\partial u'}N''-\frac{\partial P''}{\partial u'}N'\right)=\frac{1}{P'}\left(\frac{\partial P''}{\partial u'}N-\frac{\partial P}{\partial u'}N''\right)\\ &=\frac{1}{P''}\left(\frac{\partial P}{\partial u'}N'-\frac{\partial P'}{\partial u'}N\right).\end{aligned}\right.$$

On en conclut que la condition caractéristique des *surfaces développables* admet la triple forme

$$(90)\qquad \frac{\dfrac{\partial P}{\partial u'}}{N}=\frac{\dfrac{\partial P'}{\partial u'}}{N'}=\frac{\dfrac{\partial P''}{\partial u'}}{N''},$$

ce que l'on sait être exact.

DEUXIÈME PARTIE.

QUELQUES EXEMPLES JUSTIFICATIFS EMPRUNTÉS, SOIT AUX NÉO-SURFACES, SOIT AUX PSEUDO-SURFACES.

I.

Étude de la tractricéide ou « pseudo-sphère » transformée en néo-surface, dite néo-tractricéide. — Conséquence relative à la géométrie non euclidienne.

23. Il a été établi (*P. F.*, n° 59) que la pseudo-sphère n'existe pas, *en tant que pseudo-surface.* C'est en effet un lieu géométrique qui n'est pas distinct de la sphère ordinaire.

Quant à la pseudo-sphère *classique,* on sait qu'elle est engendrée par la révolution de la tractrice, tournant autour de sa base. Nous l'appelons ici, commodément *tractricéide* afin de prévenir toute confusion avec nos pseudo-surfaces. Le fait, d'ailleurs, ne sera pas nouveau, car on donne bien aussi le nom de *caténoïde* à l'alysséide, par cela seul qu'elle admet la chaînette comme courbe méridienne.

Cela posé, considérons le système suivant :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= -\frac{\rho}{1+\alpha}\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, d\rho,\\ dy &= \frac{\rho}{1+\alpha}\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, d\rho,\\ dz &= \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho}\, d\rho.\end{aligned}\right.$$

C'est un cas particulier du système (28), vû qu'on peut l'en déduire en faisant

$$f(\rho) = \frac{\rho}{1+\alpha}, \qquad \varphi'(\rho) = \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho}.$$

Il représente donc nécessairement une néo-surface. Pour savoir laquelle, il suffit d'intégrer la troisième équation, la seule du reste qui soit susceptible de l'être, et l'on trouve ainsi la tractrice T, sous la forme connue :

$$z = \sqrt{a^2-\rho^2} + a \log \frac{a - \sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho} + C.$$

En conséquence, le lieu déformé (1) mérite le nom de *néo-tractricéide* et peut convenablement être désigné par T_α.

24. Lignes remarquables. — En posant, comme d'habitude (n° 6), $u = \theta$, $u' = \rho$, il vient d'abord

$$(2) \qquad A = \frac{\rho}{1+\alpha}, \qquad A' = \frac{a}{\rho}, \qquad B'' = 0.$$

On a ensuite

$$(3) \quad D = -\frac{\rho\sqrt{a^2-\rho^2}}{(1+\alpha)^2}, \quad D' = \frac{1}{1+\alpha}\frac{a^2}{\rho\sqrt{a^2-\rho^2}}, \quad D'' = D''_1 = 0.$$

Il en résulte que l'équation générale des lignes de courbure revient ici à $ds\,ds' = 0$. Ces lignes sont donc tangentes, à l'origine, aux axes *rectangulaires* MX, MY, ce qui est une vérification.

De l'équation (18') on tire de même pour les lignes asymptotiques

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1+\alpha}} = \frac{a\,d\rho}{\rho\sqrt{a^2-\rho^2}},$$

et, par suite, en intégrant :

$$(4) \qquad \frac{\theta}{\sqrt{1+\alpha}} = \log \frac{\rho}{a+\sqrt{a^2-\rho^2}} + C.$$

Enfin, en ce qui concerne les lignes géodésiques de T_α, leur calcul se fera comme simple application de la formule (27), ce qui conduit à l'équation différentielle

$$\rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} - (2+\alpha)\frac{d\rho^2}{d\theta^2} - \frac{1}{1+\alpha}\frac{\rho^4}{a} = 0,$$

et, conséquemment, à l'équation finie :

$$(5) \qquad \theta = \int \frac{a\sqrt{\alpha(1+\alpha)}}{\rho^{2+\alpha}\sqrt{\lambda^{-2\alpha} - \rho^{-2\alpha}}}\,d\rho + C.$$

A vrai dire, cette formule devient indéterminée pour $\alpha = 0$, ce qui est précisément le cas de la tractricéide ordinaire ; mais un calcul direct permet d'y suppléer, et l'on trouve pour ce cas-limite :

$$(5') \qquad \theta = \int \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\rho^2 \sqrt{\log \frac{\rho}{\lambda}}} d\rho + C,$$

λ désignant, dans les deux formules, une première constante.

25. Éléments linéaires dS^2 et $d\Sigma^2$. — Le rôle considérable (disons, à nouveau, exagéré) que jouent ces éléments dans les deux géométries, expliquera sans peine, croyons-nous, l'étendue des développements qui suivent, aussi bien que leurs analogues, dans nos paragraphes ultérieurs.

On a, en premier lieu, sans calculs nouveaux (2) :

$$(6) \qquad dS^2 = \frac{\rho^2}{(1+\alpha)^2} d\theta^2 + \frac{a^2}{\rho^2} d\rho^2.$$

Quant à l'élément $d\Sigma$, si l'on remonte à la première des formules (62') complétée de la façon suivante :

$$(7) \qquad d\Sigma^2 = A^2 q^2 du^2 + A'^2 p'^2 du'^2 = \frac{D^2}{A^4 A'^2} du^2 + \frac{D'^2}{A^2 A'^4} du'^2,$$

on trouvera, pour l'exprimer :

$$(7') \qquad d\Sigma^2 = \frac{a^2 - \rho^2}{a^2} d\theta^2 + \frac{1}{a^2 - \rho^2} d\rho^2.$$

Comme la constante α n'y figure pas, ainsi qu'on pouvait d'ailleurs le prévoir (n° 6), il s'en suit que cette expression convient, au même titre, et à la tractricéide T, et à la néo-tractricéide T_α.

Avant de poursuivre, il importe de se demander si l'élément représentatif *généralisé* de Weingarten (n° 14) et, conséquemment, la seconde des formules (62') est applicable à notre exemple ? — Oui, sans doute, car la néo-tractricéide, on s'en assurera aisément, satisfait aux relations (49), vû que, pour elle, $a_0 = \frac{1}{a'_0} = 1 + \alpha$. Cela nous autorise donc (60) à poser

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{a}, \qquad \frac{1}{\varphi'(\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$

Mais ici une difficulté inattendue se présente. — Si l'on s'avise d'élimi-

ner ρ entre ces deux équations, de manière à en déduire l'équation différentielle

$$\varphi'(\lambda) = \frac{a}{\lambda},$$

l'intégration donnera, pour R et R', des valeurs *transcendantes* (logarithmiques) qui n'ont rien de commun avec les *vrais* rayons principaux de T_a. Il en faut dire autant de la relation *étrangère* *)

$$a_0 \mathrm{R} - \mathrm{R}' = a, \tag{8}$$

qui en est la conséquence. La relation exacte est en effet celle-ci

$$a_0 \mathrm{R}\mathrm{R}' = -a^2, \tag{9}$$

comme on peut s'en convaincre par le calcul *direct* des deux rayons vrais qui sont

$$\tag{10} \left\{ \begin{aligned} \mathrm{R} &= \frac{A^3 A'}{D} = -\frac{a\rho}{(1+\alpha)\sqrt{a^2-\rho^2}}, \\ \mathrm{R}' &= \frac{A A'^3}{D'} = \frac{a\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho}. \end{aligned} \right.$$

Que conclure de ces anomalies ? — Ce fait, uniquement, à savoir : que l'application irréfléchie du théorème, généralisé ou non, de WEINGARTEN (n° 14) peut conduire à de graves mécomptes. La suite montrera toutefois comment on peut les éviter.

26. COURBURE TOTALE. — Puisque D'', D''_1 et B'' sont nuls, c'est à la formule (63') ou

$$K'' = \frac{DD'}{A^4 A'^4},$$

de nous la donner. En y introduisant les valeurs (2) et (3) ci-dessus et d'accord, en cela, remarquons-le, avec les expressions (10), on en déduit :

$$K'' = \frac{1}{\mathrm{R}\mathrm{R}'} = -\frac{1+\alpha}{a^2}.$$

*) Il est à remarquer que cette solution (8) que le calcul amène, n'est pas *absolument* étrangère, vû qu'elle satisfait, par la raison déjà donnée (n° 17), à l'équation aux dérivées partielles (61). Ainsi en sera-t-il du reste dans les deux exemples qui vont suivre, à cela près que, pour le deuxième, c'est l'équation différentielle (70) qui sera en jeu. Le lecteur en étant averti, nous ne renouvellerons pas la présente observation. On vérifie d'ailleurs que, suivant le cas, on a bien, ou $\mathrm{U} = \mathrm{U}' = 1$, ou $\mathrm{U}_1 = \mathrm{U}'_1 = 1$, conditions essentielles, on le sait, pour la légitimité de ces divers calculs.

Mais α est une constante arbitraire ; on le sait. Si on convient de la faire varier, K'' restera *négatif* dans l'intervalle de $+\infty$ à -1. Il sera *positif* pour des valeurs de α moindres que -1 et *nul*, en particulier, pour $\alpha = -1$.

Notons, en passant, que ce dernier résultat s'obtient encore lorsque, α restant quelconque, on suppose $a = \infty$, le *plan* se substituant alors à la néo-tractricéide.

Quoiqu'il en soit ici de ce cas-limite, il résulte de ce qui précède qu'en *tous ses points*, à la fois, par suite de la variation infinitésimale de son élément linéaire dS, la tractricéide ordinaire T est susceptible de passer du domaine de la géométrie de LOBATCHEWSKI au domaine de la géométrie de RIEMANN, après avoir brusquemment traversé (pour $\alpha = -1$) celui de la géométrie d'EUCLIDE. — Ajoutons que pendant que les variations de dS produisent dans notre néo-surface de si bizarres transmutations, la représentation sphérique $d\Sigma$ de ce même élément, indépendante qu'elle est de α, reste absolument *fixe et invariable*, en tous les points du lieu !

Que penser, dirons-nous alors, en présence de faits pareils, de ce *prototype* des surfaces à courbure totale négative, qu'on appelle la « pseudosphère » ? Mérite-t-il, en vérité, le renom que lui octroie la géométrie non euclidienne ? Et de quel appui *efficace* peut-il donc bien lui être réellement ?

27. Sans insister davantage, rebroussons plutôt chemin et revenons un instant à nos rayons principaux. — Si l'on suppose la relation (9) donnée, *à priori*, je dis qu'en lui adjoignant la valeur correspondante $\frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{a}$ de $\frac{1}{\lambda}$ (7'), il devient possible d'obtenir [sans mécompte (n° 25)] les *vrais* valeurs de R et de R'.

En effet, de cette relation (9), associée aux formules (59) on tire immédiatement

$$\varphi(\varphi - \lambda\varphi') = -a^2,$$

ou bien

$$\frac{2\varphi\varphi'}{\varphi^2 + a^2} = \frac{2}{\lambda},$$

équation différentielle dont l'intégrale est

$$\varphi^2(\lambda) = a_0^2 R^2 = c\lambda^2 - a^2.$$

Or, en prenant $c = a^2$ et donnant à λ la valeur rappelée plus haut, on retrouve effectivement les valeurs exactes (10) de R et de R'.

II.

Étude de l'alysséide transformée en néo-alysséide. — Conséquence relative, etc.

28. Bien que l'alysséide, *vectoriellement déformée*, A_α, nous soit déjà connue (*E.*, n° 8), nous allons, cependant, en reprendre l'étude, mais sous une forme nouvelle et avec des détails inédits.

C'est ainsi que, en vue surtout de notre suivant paragraphe, nous la représenterons par le système (à dessein plus compliqué) que voici :

$$(11)\quad \begin{cases} dx = -\sqrt{\rho^2 + a^2}\sin\theta\, d\theta + (1+\alpha)\cos\theta \dfrac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2+a^2}}, \\ dy = \sqrt{\rho^2 + a^2}\cos\theta\, d\theta + (1+\alpha)\sin\theta \dfrac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2+a^2}}, \\ dz = (1+\alpha)\dfrac{a\, d\rho}{\sqrt{\rho^2+a^2}}. \end{cases}$$

Les deux premières équations, hâtons-nous de le faire observer, reproduiraient leurs correspondantes dans le système (1), pourvu qu'on y remplaçât a par $a(1+\alpha)$ et ρ par $(1+\alpha)\sqrt{\rho^2+a^2}$. Elles rentreraient ainsi, par ce changement, dans le type (28), pour $f(\rho) = \dfrac{\rho}{1+\alpha}$.

Quoiqu'il en soit, si dans le système (11), pris tel qu'il est, on pose $\alpha = 0$, son intégration devient possible et fournit l'alysséide A sous la forme appropriée :

$$x = \sqrt{\rho^2+a^2}\cos\theta, \quad y = \sqrt{\rho^2+a^2}\sin\theta, \quad \frac{z}{a} = \log\frac{\rho + \sqrt{\rho^2+a^2}}{a}.$$

Cela posé, procédons à notre étude, en adoptant le même ordre de questions que ci-dessus.

29. Lignes remarquables. — Actuellement encore, l'équation des lignes de courbure (16') ou (16'') appliquée à notre *néo-alysséide* A_α, doit, *a priori*, la réduire à $ds\,ds' = 0$; et c'est ce qui a lieu en effet.

Pour obtenir celle des lignes asymptotiques, nous remarquons

qu'avec

(12) $$A = \sqrt{\rho^2 + a^2}, \quad A' = 1 + \alpha, \quad B'' = 0,$$

on a aussi

(13) $$D = -a(1+\alpha)\sqrt{\rho^2+a^2}, \quad D' = \frac{a(1+\alpha)^2}{\sqrt{\rho^2+a^2}}, \quad D'' = D''_1 = 0,$$

d'où, pour l'équation différentielle de ces lignes :

(14) $$(\rho^2 + a^2)d\theta^2 - (1+\alpha)d\rho^2 = 0,$$

et pour leur équation finie :

(14') $$\frac{\theta}{\sqrt{1+\alpha}} = \log\frac{\rho + \sqrt{\rho^2+a^2}}{a} + C = \frac{z}{a} + C.$$

Passant aux lignes géodésiques, on a d'abord

(15) $$\left(\rho + \frac{a^2}{\rho}\right)\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - (2+\alpha)\frac{d\rho^2}{d\theta^2} - \frac{\rho^2 + a^2}{1+\alpha} = 0;$$

puis, finalement,

$$\frac{\theta}{1+\alpha} = \int \frac{\lambda d\rho}{\sqrt{(\rho^2+a^2)[(\rho^2+a^2)^{1+\alpha} - \lambda^2]}} + C.$$

Nous retrouverons, bientôt, parmi plusieurs autres, ces divers résultats.

30. Éléments linéaires dS^2 et $d\Sigma^2$. — L'expression de dS^2 peut, d'après les valeurs (12), s'écrire immédiatement. On a en effet

(16) $$dS^2 = (\rho^2 + a^2)d\theta^2 + (1+\alpha)^2 d\rho^2.$$

De son côté, celle de $d\Sigma^2$, déduite des formules (7) et (13), est

(17) $$d\Sigma^2 = \frac{a^2}{\rho^2+a^2}d\theta^2 + \frac{a^2}{(\rho^2+a^2)^2}d\rho^2,$$

résultat d'où la constante α a disparu, ce qui, dans l'espèce, était loin d'être évident, à *priori*.

La néo-alysséide A_α donnant à son tour, pour a_0, une valeur constante qui se trouve encore être égale à $1+\alpha$, le théorème généralisé de Weingarten lui est applicable, et on peut poser, en conséquence :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{a}{\sqrt{\rho^2+a^2}}, \quad \frac{1}{\varphi'(\lambda)} = \frac{a}{\rho^2+a^2}.$$

Or, si l'on élimine ρ entre ces deux équations, il vient :

$$\varphi'(\lambda) = a\lambda^2;$$

d'où, en intégrant, on déduit pour R et pour R' des valeurs *rationnelles*,

il est vrai, mais, comme au n° 25, sans aucun rapport avec notre néo-surface et qui, pour ce motif, entraînent la relation *inexacte*:

$$(18) \qquad 2a_0 R + R' = 0.$$

D'autre part, à l'aide d'un calcul direct, on obtient les valeurs suivantes:

$$(19) \qquad R = -\frac{\rho^2 + a^2}{a}, \qquad R' = (1+\alpha)\frac{\rho^2 + a^2}{a};$$

d'où, la relation *vraie :*

$$(20) \qquad a_0 R + R' = 0.$$

Je dis, vraie, car pour $a_0 = 1$ ou $\alpha = 0$, par exemple, elle fait bien retrouver cette propriété connue de l'alysséide ordinaire: d'être une surface *minima.*

31. Courbure totale. — Du rapprochement des formules (63′) et (II, 19), on conclut que

$$(21) \qquad K'' = \frac{1}{RR'} = -\frac{1}{1+\alpha}\frac{a^2}{(\rho^2 + a^2)^2}.$$

Ainsi, pour une même valeur de $\sqrt{\rho^2 + a^2}$, c'est-à-dire sur un même parallèle (déformé), la courbure totale est *négative,* tant que l'on a $\alpha > -1$, *positive,* pour $\alpha < -1$ et *infinie* pour $\alpha = -1$.

Devant ce résultat, que le lecteur essaie, si possible, de se représenter les étranges métamorphoses qui doivent simultanément s'opérer dans la néo-surface A_α. En ce qui nous concerne, nous n'aurons garde de l'y suivre. Et pourtant, elles ne proviennent, ces métamorphoses, que de la variation hypothétique d'une simple *constante,* engagée, ici encore (voir n° 26), dans l'un des termes de l'élément linéaire dS. N'en faut-il pas conclure que l'importance que l'on attache, depuis les travaux de Gauss, à la courbure totale des surfaces classiques, en général, est considérablement surfaite? Et dire, après cela que les conceptions les plus hardies de la Géométrie non euclidienne, n'ont pas (en Analyse) de meilleur soutien! *) Mais laissons pour le moment ce sujet, et revenons à la relation exacte (20).

---

*) Ajoutons qu'à toute pseudo-surface **F**, on peut toujours faire correspondre (*P. F.*, n° 33) une néo-surface osculatrice moyenne $F_{n,m}$ ou F_m, telle que les deux lieux aient mêmes géodésiques, mêmes asymptotiques, et soient, dès lors, parfaitement applicables l'un sur l'autre, mais sans avoir toutefois, ni mêmes lignes de courbure, ni, par conséquent, *même courbure totale.*

Supposons-la donnée, *à priori*, cette relation, et associons-la aux formules (59). On en pourra déduire l'équation différentielle

$$\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \frac{2}{\lambda},$$

dont l'intégrale est

$$\varphi(\lambda) = a_0 R = c\lambda^2.$$

Que si maintenant on suppose la valeur $\frac{a}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}$ de $\frac{1}{\lambda}$ également donnée, et qu'on prenne $c = -a(1+\alpha)$, on retombera exactement sur les valeurs (19) de R et de R'. — C'est, on le voit, la méthode qui nous a réussi, une première fois, dans l'étude de la néo-tractricéide (n° 27).

III.

Étude de l'hélicoïde gauche, à plan directeur, transformé en pseudo-surface dite pseudo-hélicoïde. — Conséquence.

32. Considérons le système suivant :

$$(22) \qquad \begin{cases} dx = -\rho \sin\theta\, d\theta + (1+\alpha)\cos\theta\, d\rho, \\ dy = \rho\cos\theta\, d\theta + (1+\alpha)\sin\theta\, d\rho, \\ dz = a\, d\theta. \end{cases}$$

On y reconnait, sans changement d'aucune sorte, le pseudo-hélicoïde $\mathbf{H}_\alpha$ dont nous nous sommes occupé dans les *Nouvelles Annales* (1901, p. 64). Il s'agit, comme pour la néo-alysséide A_α, d'en reprendre brièvement l'étude, de la compléter et d'en tirer une conclusion utile à notre objet.

33. Lignes remarquables. — De ce que, dans le cas actuel, on a

$$(23) \qquad A = \sqrt{\rho^2 + a^2}, \quad A' = 1+\alpha, \quad B'' = 0,$$

en même temps que

$$(24) \qquad D = D' = 0, \quad D'' = a(1+\alpha)^2, \quad D''_1 = a(1+\alpha),$$

il suit que la condition $D'' = D''_1$ n'étant plus vérifiée, comme elle l'avait été jusqu'ici, le lieu (22) n'est ni une surface, ni une néo-surface. C'est donc nécessairement une pseudo-surface, et, de plus, une pseudo-surface *minima*, attendu que les valeurs précédentes rendent *identique* la condition caractéristique (19'').

Cela étant, on trouve sans peine que les lignes de courbure (obliques) de $\mathbf{H}_\alpha$ ont pour équation différentielle

$$(25)\qquad (\rho^2 + a^2)\,d\theta^2 - (1+\alpha)\,d\rho = 0,$$

tandis que celle des lignes asymptotiques (rectangulaires) est $ds\,ds' = 0$. Or ce sont là justement les deux systèmes de lignes remarquables, de même nom, rencontrées dans l'exemple précédent, mais toutefois *intervertis*, et cela, qu'on le remarque bien, sans qu'il y ait ici orthogonalité réciproque des éléments correspondants, ainsi que le fait a lieu lorsqu'on suppose $\alpha = 0$, pour revenir aux surfaces ordinaires.

En ce qui concerne les lignes géodésiques, leur équation différentielle se présente sous la forme

$$(26)\qquad \left(\rho + \frac{a^2}{\rho}\right)\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - (2+\alpha)\frac{d\rho^2}{d\theta^2} - \frac{\rho^2 + a^2}{1+\alpha} = 0,$$

reproduction pure et simple de l'équation (II, 15). Les équations finies qui en résultent sont donc les mêmes de part et d'autre, et, dans l'espace, les lignes géodésiques de la néo-surface A_α et de la *pseudo-surface* (minima) $\mathbf{H}_\alpha$ coïncident.

34. Éléments linéaires dS^2 et $d\Sigma^2$. — Des relations (23), on tire immédiatement

$$(27)\qquad dS^2 = (\rho^2 + a^2)\,d\theta^2 + (1+\alpha)^2\,d\rho^2;$$

ce qui fait retrouver exactement l'élément linéaire (16) de A_α.

Ainsi, aux propriétés communes déjà signalées, nos deux lieux géométriques, si dissemblables pourtant *par nature*, ajoutent celle d'avoir même élément linéaire, et par suite, d'être (pour une double raison) *applicables* l'un sur l'autre en leurs points correspondants.

La représentation sphérique

$$(28)\qquad d\Sigma^2 = \frac{a^2}{\rho^2 + a^2}\,d\theta^2 + \frac{a^2}{(\rho^2 + a^2)^2}\,d\rho^2,$$

identique, elle aussi, à celle (17) de A_α donne lieu à cette remarque nouvelle que $\mathbf{H}_\alpha$ ne rentrant pas, comme le fait A_α, dans le type des néo-surfaces (I, 28), la coïncidence de leurs éléments $d\Sigma$ respectifs ne pouvait pas être prévue.

Mais venons à l'application du théorème de Weingarten tel que nous l'avons, une seconde fois, généralisé (n° 15), en vue précisément des pseudo-surfaces minima.

Qu'il soit applicable à notre pseudo-hélicoïde $\mathbf{H}_\alpha$, cela résulte de ce que, pour lui, on a encore : $a_0 = 1 + \alpha$ et que dès-lors il nous est permis de poser :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{a}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}, \qquad \frac{1}{\varphi'(\mu)} = \frac{a}{\rho^2 + a^2}.$$

La solution quasi-étrangère (*voir* Note, n° 25) que l'élimination de ρ amène, savoir

$$(29) \qquad 2a_0 R_1 + R_1' = 0,$$

ne diffère que par les indices de son analogue (18). Sans nous y arrêter, disons seulement que les rayons principaux *corrélatifs* R_1 et R_1' ayant pour valeur exacte

$$(30) \qquad \begin{cases} R_1 = \dfrac{A^2 A'^2}{D''} = \dfrac{\rho^2 + a^2}{a}, \\ R_1' = -\dfrac{A^2 A'^2}{D_1''} = -(1+\alpha)\dfrac{\rho^2 + a^2}{a}, \end{cases}$$

on en déduit la relation vraie

$$(31) \qquad a_0 R_1 + R_1' = 0.$$

Abstraction faite des indices, elle ne fait que reproduire la relation (21).

35. Courbure totale. — C'est à la formule (63'') qu'il nous faut recourir ici. Eu égard aux valeurs (30) ci-dessus, elle nous donne

$$(32) \qquad K'' = \frac{1}{R_1 R_1'} = -\frac{1}{1+\alpha}\frac{a^2}{(\rho^2 + a^2)^2},$$

ce qui n'est autre chose que la courbure totale (21) de la néo-alysséide A_α.

Pour mieux saisir toute la portée de ce dernier résultat, rapprochons entr'eux les éléments divers qui ont concouru à le produire. On a, pour la néo-alysséide et le pseudo-hélicoïde pris consécutivement :

$$(d) \qquad \begin{cases} K'' = \dfrac{DD'}{A^4 A'^4} = -\dfrac{D'' D_1''}{A^4 A'^4}, \\ R = \dfrac{A^3 A'}{D} = -\dfrac{A^2 A'^2}{D''} = -R_1, \\ R' = \dfrac{A A'^3}{D'} = \dfrac{A^2 A'^2}{D_1''} = -R_1'. \end{cases}$$

De l'examen de ce tableau on est en droit de conclure que, par

l'identité des résultats *numériques* qu'à l'aide d'éléments quasi opposés, elle est cependant susceptible de fournir, la courbure totale prise, même en général, est impuissante à classifier sûrement les entités géométriques : néo-surfaces, pseudo-surfaces, etc., que, sur la simple donnée d'un espace indéfini et homogène, l'intelligence pure a seule le privilège de concevoir et d'engendrer.

A plus forte raison, en tant que supposée *constante*, et exclusivement issue de surfaces usuelles, cette même courbure totale est-elle incapable de servir de critérium à une science abstraite vraiment rassise et digne de ce nom. Faut-il s'étonner après cela que la haute Analyse bannisse la Géométrie non euclidienne toute entière de ses plus *délicates* spéculations, ainsi que le présent Mémoire l'atteste et le prouve, en la renvoyant, non sans dérision, à coup sûr, mais conformément à ses propres désirs. — Où donc ?... à L'EXPÉRIENCE !...

Cela dit, revenons à notre sujet. — Si l'on se donne, *à priori*, la relation (31), en même temps que la valeur $\frac{a}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}$ de $\frac{1}{\mu}$, on retrouvera, à l'aide des formules (68), les expressions exactes (30) de R_1 et de R'_1.

IV.

Digression relative à une expression (analytique) simplifiée des pseudo-surfaces. — Formules diverses correspondantes.

36. Remontons au système (I, 1). Nous savons qu'il représente une pseudo-surface quand les coefficients P, Q, P',... qui y figurent désignent sans conditions d'aucune sorte, des fonctions arbitraires de u et de u'. — Soient $P = Q' = 1$ et $Q = P' = 0$, et, par suite, $u = x$, $u' = y$. Les trois équations du système se réduiront alors à la suivante :

$$(33) \qquad dz = P'' dx + Q'' dy,$$

où P'', Q'' sont maintenant des fonctions quelconques de x et y. On peut donc l'écrire ainsi

$$(33') \qquad dz = \varphi(x, y) dx + \psi(x, y) dy,$$

ou, plus simplement et par analogie :

$$(34) \qquad dz = \mathrm{p}\, dx + \mathrm{q}\, dy.$$

Telle est la forme sous laquelle nous avons désormais à étudier nos

pseudo-surfaces. Par définition, elle implique, l'inégalité

$$(35)\qquad \frac{\partial p}{\partial y} \neq \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Comme, d'autre part, c'est le signe d'égalité que les surfaces exigent et qu'il n'existe pas de milieu entre les deux cas, il s'en suit que la forme (34) *exclut* totalement *les néo-surfaces*. Reprenons la forme (33'). Si l'on y pose $y = 0$, elle se réduira à celle-ci

$$dz = \varphi(x)\,dx.$$

C'est là l'équation différentielle d'une *pseudo-courbe*, plutôt que celle d'une courbe, située dans le plan des zx; car lorsqu'il n'existe pas (et c'est le cas ordinaire) de fonction finie de x dont la dérivée soit exactement égale à $\varphi(x)$, le lieu correspondant doit être envisagé comme la section, par le plan $y = 0$, non pas d'une surface, mais d'une pseudo-surface de la forme (33').

En ce qui concerne le plan tangent d'une pseudo-surface prise sous la forme (34) l'équation générale (I, 2) qui doit le donner, se réduit ici à

$$(36)\qquad z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0).$$

On en conclut pour les équations de la normale correspondante:

$$(37)\qquad \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

37. Comme, dans le système de coordonnées que nous venons d'adopter, on a

$$(38)\qquad A^2 = 1 + p^2,\quad A'^2 = 1 + q^2,\quad B'' = pq,$$

et que, d'autre part,

$$(39)\qquad \begin{cases} D = \dfrac{\partial p}{\partial x} = r, & D'' = \dfrac{\partial q}{\partial x} = s, \\[2mm] D' = \dfrac{\partial q}{\partial y} = t, & D''_1 = \dfrac{\partial p}{\partial y} = s_1, \end{cases}$$

la série de rapports égaux (I, 12) revêt la forme *):

---

*) Que si l'on tient, par anticipation, à rapprocher de ces valeurs celles de n, n', r, r', on trouvera, eu égard aux formules (20, 26 et 26') de la première Partie et (46) de la seconde:

$$(40^{\text{bis}})\qquad \begin{cases} \dfrac{n\sqrt{1+p^2}}{s} = \dfrac{n'\sqrt{1+q^2}}{t} = \dfrac{-p}{(1+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\[2mm] \dfrac{r\sqrt{1+p^2}}{r} = \dfrac{r'\sqrt{1+q^2}}{s_1} = \dfrac{q}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}; \end{cases}$$

$$(40)\quad \frac{-q}{\left(\frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}}\right)r} = \frac{p'}{\left(\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+q^2}}\right)t} = \frac{p}{s} = \frac{-q'}{s_1} = \frac{1}{1+p^2+q^2}.$$

De là, on tire, pour l'élément linéaire, d'abord:

$$(41)\qquad dS^2 = (1+p^2)dx^2 + (1+q^2)dy^2 + 2pq\,dx\,dy,$$

puis, pour la courbure totale:

$$(42)\qquad K'' = pq' - qp' = \frac{rt - ss_1}{(1+p^2+q^2)^2},$$

enfin, pour la pseudo-courbure totale:

$$(42')\qquad K'' = \frac{rt - \frac{1}{4}(s+s_1)^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

La représentation sphérique $d\Sigma$ de dS n'offrant, d'autre part, *dans le cas général,* qu'un médiocre intérêt, nous nous dispenserons de l'écrire.

38. Avant de nous occuper des lignes remarquables de la pseudo-surface (34) nous ferons observer que, comme conséquence des notations (39) ci-dessus, on a les identités suivantes:

$$(43)\qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ dp = r\,dx + s_1\,dy, \\ dq = s\,dx + t\,dy. \end{cases}$$

D'après cela, on se rendra aisément compte, sans même remonter à la formule générale (I, 16''), que l'équation des lignes de courbure soit:

$$(44)\qquad dq(dx + p\,dz) - dp(dy + q\,dz) = 0,$$

ou, plus explicitement:

$$(44')\quad \begin{cases} [(1+p^2)s - pqr]dx^2 - [(1+q^2)r - pq(s-s_1) - (1+p^2)t]dx\,dy \\ \qquad - [(1+q^2)s_1 - pqt]dy^2 = 0, \end{cases}$$

et que, de même, les lignes asymptotiques puissent être représentées d'abord par

$$(45)\qquad dp\,dx + dq\,dy = 0,$$

---

d'où l'on déduit, notamment:

$$\frac{rn'}{rt} = \frac{nr'}{ss_1} = \frac{rn' - nr'}{rt - ss_1}.$$

puis par

(45') $$r\,dx^2 + (s + s_1)dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

Arrivons maintenant, aux lignes géodésiques. — Si l'on observe avant tout que le Tableau (I, 20) doit être transformé comme il suit :

(46) $$\left\{\begin{array}{llll} \sum PR = pr, & \sum PS = ps, & \sum PS_1 = ps_1, & \sum PT = pt, \\ \sum QR = qr, & \sum QS = qs, & \sum QS_1 = qs_1, & \sum QT = qt, \end{array}\right.$$

et que d'autre part (*Nouvelles Annales*, 1901, p. 84), l'équation générale (I, 27) des lignes géodésiques peut être remplacée par celle-ci, de forme mixte ou composée :

(47) $$\left\{\begin{aligned} &(A^2 A'^2 - B''^2)(du\,d^2u' - du'\,d^2u) \\ &= (B'' \textstyle\sum PR - A^2 \sum QR)du^3 \\ &+ [A'^2 \textstyle\sum PR - A^2 \sum Q(S+S_1) + B'' \sum P(S+S_1) - B'' \sum QR]du^2du' \\ &- [A^2 \textstyle\sum QT - A'^2 \sum P(S+S_1) + B'' \sum Q(S+S_1) - B'' \sum PT]du\,du'^2 \\ &- (B'' \textstyle\sum QT - A'^2 \sum PT)du'^3, \end{aligned}\right.$$

on concevra sans peine que, pour le cas actuel, où l'on a $u = x$, $u' = y$, cette dernière équation puisse finalement s'écrire :

(48) $$\left\{\begin{aligned} &(1 + p^2 + q^2)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) \\ &\qquad = (p\,dy - q\,dx)[r\,dx^2 + (s + s_1)dx\,dy + t\,dy^2], \end{aligned}\right.$$

voire encore, sous cette forme plus condensée :

(48') $$dx\,d^2y - dy\,d^2x = p(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + q(dz\,d^2x - dx\,d^2z),$$

en tenant compte de ce que

$$dz = p\,d^2x + q\,d^2y + r\,dx^2 + (s + s_1)dx\,dy + t\,dy^2.$$

Faut-il ajouter, pour tout clore, que cette forme si remarquable (48') n'est qu'un cas particulier de cette autre :

(47') $$\mathbf{A}(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + \mathbf{A}'(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + \mathbf{A}''(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0,$$

où l'on a fait, pour abréger :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= P'Q'' - Q'P'', \\ \mathbf{A}' &= P''Q - Q''P, \\ \mathbf{A}'' &= PQ' - QP', \end{aligned}$$

en sorte que, eu égard aux identités

$$d^2x = P\,d^2u + Q\,d^2u' + R\,du^2 + (S + S_1)du\,du' + T\,du'^2,$$

. . . . ,

les trois équations (I, 27), (47) et (47') sont parfaitement équivalentes ?

V.

Étude du pseudo-plan. — Conséquence. — Retour aux pseudo-surfaces, ou développables, ou simplement réglées.

39. Définition et équation différentielle. — Dans nos *Principes fondamentaux*, etc., nous nous sommes proposé (n° 58) de chercher s'il existe des pseudo-surfaces telles qu'en chacun de leurs points il passe une infinité de lignes asymptotiques, et nous avons qualifié de *pseudo-plan*, le lieu géométrique, unique en son genre, **P** qui satisfait à une telle condition.

Ce même lieu s'étant présenté à nous, dès le n° 20 de ce Mémoire, mais à un point de vue différent, c'est à ce second point de vue que nous allons en reprendre l'étude, en nous aidant, à cet effet, des formules nouvelles que le paragraphe qui précède nous fournit. — Par exemple, les trois conditions :

$$D = 0, \qquad D'' + D''_1 = 0, \qquad D' = 0,$$

qui, tout en rejetant à l'infini l'indicatrice (84) rendaient, au contraire, *identiques* les équations des ombilics

$$\frac{D}{A^2} = \frac{D'' + D''_1}{2B''} = \frac{D'}{A'^2},$$

prennent actuellement la forme

$$(49) \qquad \mathrm{r} = 0, \qquad \mathrm{s} + \mathrm{s}_1 = 0, \qquad \mathrm{t} = 0,$$

ou bien

$$(49') \qquad \frac{\partial \mathrm{p}}{dx} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{q}}{dx} + \frac{\partial \mathrm{p}}{dy} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{q}}{dy} = 0.$$

C'est là un système d'équations aux dérivées partielles qu'il nous faut, dès à présent, intégrer. Or, on voit aussitôt que p doit être indépendant de x et q de y et, de plus, qu'on peut satisfaire aux trois conditions, *à la fois*, si l'on pose :

$$\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathrm{q}}{\partial x} = \frac{1}{a},$$

a désignant une constante, tout d'abord, *réelle*.

Cela étant, l'intégration nous donne :

$$p = \frac{y - y_1}{a}, \quad q = -\frac{x - x_1}{a},$$

valeurs qui, introduites dans l'équation générale des pseudo-surfaces rapportées au système actuel des coordonnées, lui font prendre la forme :

$$(50) \qquad dz = \frac{y - y_1}{a} dx - \frac{x - x_1}{a} dy,$$

et nous fournissent ainsi *l'équation différentielle* du pseudo-plan.

Que cette équation ne soit pas intégrable, c'est ce qui devait avoir lieu, *à priori*, (n° 36), et il serait superflu d'insister sur ce point.

Pour procéder avec plus d'aisance à l'analyse des principales propriétés du nouveau lieu géométrique, nous supposerons *nulles* les deux constantes x_1, y_1 et cela, à l'instar de ce qui se pratique pour la sphère, dont les propriétés intrinsèques s'étudient avec plus de facilité au moyen de l'équation réduite

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

qu'avec l'équation générale

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = a^2.$$

C'est donc de la forme simplifiée

$$(51) \qquad dz = \frac{y}{a} dx - \frac{x}{a} dy,$$

que nous allons partir *).

40. Principales propriétés. — α. En premier lieu, l'équation du plan tangent de **P** résulte de la formule (36) qui devient ici

$$z - z_0 = \frac{y_0}{a}(x - x_0) - \frac{x_0}{a}(y - y_0),$$

ou, plus simplement,

$$z - z_0 = \frac{y_0}{a} x - \frac{x_0}{a} y.$$

Les équations de la normale au même point s'en déduisent, car on a

$$\frac{x - x_0}{-\frac{y_0}{a}} = \frac{y - y_0}{\frac{x_0}{a}} = \frac{z - z_0}{1} = \frac{a}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + a^2}}.$$

*) Elle exclut, par hypothèse, qu'on y fasse $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$.

β. L'élément linéaire (41), de son côté, a pour expression

$$(52)\qquad a^2 dS^2 = (y^2 + a^2)dx^2 + (x^2 + a^2)dy^2 - 2xy\,dx\,dy$$

ou bien

$$(52')\qquad a^2 dS^2 = a^2(dx^2 + dy^2) + (x\,dy - y\,dx)^2,$$

forme à rapprocher de celle (non homogène, remarquons-le) qu'on attribue à l'élément linéaire de toute surface usuelle à courbure totale constante positive $\frac{1}{a^2}$, savoir :

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 dS^2 = a^2(dx^2 + dy^2) + a^2(x\,dy - y\,dx)^2.$$

Quant à la représentation sphérique du premier de ces arcs, si on la calcule à l'aide de la formule générale (I, 62) et en tenant compte des relations établies au n° 37, il viendra successivement

$$(53)\qquad d\Sigma^2 = \frac{s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} dS^2 = \frac{a^2}{(x^2 + y^2 + a^2)^2} dS^2.$$

Nous retrouverons, dans la suite, ce résultat.

γ. Les lignes de courbure de notre pseudo-plan sont définies par l'équation

$$(54)\quad (y^2 + a^2)dx^2 + (x^2 + a^2)dy^2 - 2xy\,dx\,dy = dS^2 = 0.$$

Ce sont donc les lignes dites de *longueur nulle*, de cette pseudo-surface, propriété, il est essentiel de l'observer, que le plan ne possède pas, car, pour lui, l'équation des lignes de courbure est indéterminée.

Indéterminée est aussi, du reste, l'équation des lignes asymptotiques, soit du pseudo-plan, soit du plan, ainsi qu'on le savait déjà (49).

Pour ce qui concerne les lignes géodésiques, l'équation (48) qui les donne se réduisant à

$$(55)\qquad dx\,d^2y - dy\,d^2x = 0,$$

et, par suite, à

$$mx + ny + p = 0,$$

on en conclut que ce sont des droites qui se confondent, en projection horizontale, avec les diverses droites du plan des xy, propriété qui convient aussi, il est vrai, à tout plan et nous ramène, de soi, au théorème de Beltrami (n° 19), auquel il apporte, par là-même, une généralisation partielle (quant à la perspective qu'il implique) aussi singulière qu'inattendue.

δ. Venons à la courbure totale. — On a immédiatement (42)

et (53)

$$(56) \qquad K'' = \frac{s^2}{(1+p^2+q^2)^2} = \frac{a^2}{(x^2+y^2+a^2)^2} = \frac{d\Sigma^2}{ds^2}.$$

Cette courbure est donc (sans modification aucune de l'élément linéaire) *positive*, pour a réel, *négative*, pour a imaginaire et *nulle* pour a infini *).

Dans ce dernier cas, l'équation (51) se réduit à $dz = 0$; d'où l'on tire : $z = h$. Le pseudo-plan n'est plus alors qu'un plan horizontal.

ε. Que le pseudo-plan **P** soit une pseudo-surface *ombilicale*, cela résulte de ce que les conditions (49) qui, avec nos coordonnées actuelles servent à le définir, transforment en identités les équations

$$(57) \qquad \frac{r}{1+p^2} = \frac{s+s_1}{2pq} = \frac{t}{1+q^2},$$

qui sont précisément celles des ombilics d'une pseudo-surface quelconque.

Pour $s = s_1 = 0$, on obtient le plan, surface ombilicale aussi, en tant que limite d'une sphère de rayon infini.

ζ. Le pseudo-plan est à la fois une pseudo-surface *minima*, et une pseudo-surface *développable*. En effet, si l'on écrit que les lignes asymptotiques (45') sont rectangulaires *dans leur propre plan*, et que, par suite, l'indicatrice correspondante (I) est une hyperbole équilatère, on reconnaîtra d'abord, en s'aidant des formules de transformation

$$ds = dX = \sqrt{1+p^2}\,dx, \quad ds' = dY = \sqrt{1+q^2}\,dy, \quad \cos\Phi = \frac{pq}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}},$$

que la condition caractéristique des pseudo-surfaces minima est

$$(58) \qquad (1+q^2)r - pq(s+s_1) + (1+p^2)t = 0,$$

---

*) Considérons, par analogie, le pseudo-plan *déformé* P_α défini par le système

$$(49^{bis}) \qquad r = 0, \quad s + s_1 = \frac{\alpha}{a}, \quad t = 0,$$

et dont l'équation différentielle dégagée, à son tour, des deux constantes x_1, y_1, peut s'écrire

$$dz = \frac{y}{a}dx - (1-\alpha)\frac{x}{a}dy.$$

On reconnaîtra aisément que sa courbure totale a pour expression

$$K'' - \frac{s\left(s - \frac{\alpha}{a}\right)}{(1+p^2+q^2)^2} = \frac{(1-\alpha)a^2}{[(1-\alpha)^2x^2+y^2+a^2]^2},$$

laquelle, pour des valeurs *constamment réelles* de a, cette fois, est susceptible de devenir, elle aussi, successivement, positive, ou négative.

formule qu'on aurait pu, du reste, déduire directement de la condition (I, 19'').

Quoiqu'il en soit, on voit que les hypothèses (49) la vérifient identiquement.

De même, en écrivant que les lignes asymptotiques (45') coïncident, soit dans leur plan, soit en projection horizontale (ce qui est ici plus simple) on trouve :

$$rt - \frac{1}{4}(s + s_1)^2 = 0, \tag{59}$$

condition identiquement vérifiée, elle aussi, et qui exprime que la pseudo-courbure totale (42') est nulle.

Vû l'importance de la question actuelle, nous allons la présenter autrement :

L'équation (85) dite équation aux rayons principaux d'une pseudo-surface quelconque, pouvant être transformée comme il suit :

$$(60) \left\{ \begin{aligned} &\left[rt - \tfrac{1}{4}(s+s_1)^2\right]\mathbf{R}^2 - [(1 + q^2)r - pq(s + s_1) \\ &\qquad + (1 + p^2)t]\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathbf{R} + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

les conditions (58) et (59) expriment que les deux premiers termes de cette nouvelle équation sont nuls ; ce qui exige que les deux rayons principaux soient égaux, de signes contraires et, de plus, infinis. On en conclut, comme au n° 20, que c'est bien à double titre que le pseudo-plan peut être qualifié de pseudo-surface développable.

η. On peut se demander, à ce propos, s'il ne rentre pas dans la catégorie de celles, étudiées au n° 31 ? La réponse est affirmative. En effet, si dans le système (87) on pose, avec $u = x$ et $u' = y$:

$$(61) \left\{ \begin{array}{llll} P = 1, & Q = 0, & N = 0, & \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0, \\ P' = 0, & Q' = 1, & N' = 1, & \dfrac{\partial P'}{\partial y} = 0, \\ P'' = \dfrac{y}{a} & Q'' = -\dfrac{x}{a}, & N'' = 0, & \dfrac{\partial P''}{\partial y} = \dfrac{1}{a}, \end{array} \right.$$

il se réduit à

$$dz = \frac{y}{a}dx - \frac{x}{a}dy,$$

ce qui est bien l'équation différentielle (51) du pseudo-plan.

Ceci va nous servir de transition pour établir, avant de terminer

notre travail *), les équations aux dérivées partielles de deux importantes catégories de pseudo-surfaces. Toutefois, nous ne pouvons ne pas tirer auparavant une brève conclusion de l'exposé qui précède. Toute ironie à part, nous la présenterons sous la forme suivante:

Que le lecteur veuille bien mettre en parallèle les propriétés du pseudo-plan ci-dessus établies, avec celles que nous le supposons connaître de la pseudo-sphère classique et qu'après mûr examen, il se demande si la géométrie (plane) non euclidienne, en quête d'une base qui la relie fortement à la haute Analyse, ne gagnerait pas, puisque, courbure constante négative, il lui faut, à abandonner sa tractricéide ou pseudo-sphère et à lui substituer le pseudo-plan *imaginaire*, dont la courbure totale, à l'origine (qu'on sait être quelconque), est égale à $-\frac{1}{a^2}$? Qui ne voit d'ailleurs, après tout ce qui a été dit, que, généralement, la sphère réelle et la tractricéide imaginaire sont au pseudo-plan réel, ce que la sphère imaginaire et la tractricéide réelle sont au pseudo-plan imaginaire ?

41. ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DES PSEUDO-SURFACES À COURBURE TOTALE NULLE ET DES PSEUDO-SURFACES RÉGLÉES. — On a vu (n° 36) que le plan tangent, au point (x_0, y_0, z_0), d'une pseudo-surface représentée par l'équation (34), peut s'écrire:

$$z - z_0 = \mathrm{p}(x - x_0) + \mathrm{q}(y - y_0).$$

Pour qu'il soit parallèle à la droite:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{1}, \tag{62}$$

il faut et il suffit que l'on ait:

$$a\mathrm{p} + b\mathrm{q} = 1. \tag{63}$$

De là, deux cas bien distincts: 1° Différentions cette condition par rapport à x et à y; nous aurons:

$$\left\{\begin{array}{l} a\mathrm{r} + b\mathrm{s} = 0, \\ a\mathrm{s}_1 + b\mathrm{t} = 0. \end{array}\right. \tag{64}$$

Si maintenant on suppose qu'il existe entre p et q une relation de

*) Nous ne nous arrêterons pas à l'application suivante de la formule de GREEN:
$$\int(\mathrm{p}dx+\mathrm{q}dy)=\int\int\left(\frac{\partial \mathrm{q}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial y}\right)dxdy=\int\int(\mathrm{s}-\mathrm{s}_1)dxdy=-\frac{2}{a}\int\int dxdy.$$

la forme : $q = \varphi(p)$, on en déduira d'abord

$$dq = \varphi'(p)dp,$$

ou bien (43) :

$$[s - \varphi'(p)r]dx + [t - \varphi'(p)s_1]dy = 0.$$

Ceci devant avoir lieu, quel que soit le rapport $\frac{dy}{dx}$, on en conclut

$$s = \varphi'(p)r, \qquad t = \varphi'(p)s_1,$$

et, par suite,

(65) $$rt - ss_1 = 0.$$

Remontant aux équations (64) on voit que, pour être compatibles, il est nécessaire et suffisant que la condition précédente soit remplie. Or, on y reconnait (42) celle qui caractérise les pseudo-surfaces à *courbure totale nulle.*

2° Supposons les équations (64) telles que la condition (65) ne soit pas satisfaite, ce qui est le cas général ; multiplions la première par a, la deuxième par b et ajoutons-les ; il viendra :

(66) $$a^2 r + ab(s + s_1) + b^2 t = 0.$$

Cela étant, nous ferons observer que, d'après les identités (43), on a par supposition :

(67) $$\frac{\partial p}{\partial y} \neq \frac{\partial q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x},$$

et que l'on peut, conséquemment, poser :

(68) $$\begin{cases} dr = u\,dx + u_1 dy, & ds = u_2 dx + v_1 dy, \\ ds_1 = u_1 dx + v_2 dy, & dt = v_1 dx + v\,dy. \end{cases}$$

Il en résulte qu'en différentiant, par rapport à x et à y, la relation (66), on aura :

(69) $$\begin{cases} a^2 u + ab(u_1 + u_2) + b^2 v_1 = 0, \\ a^2 u_1 + ab(v_1 + v_2) + b^2 v = 0; \end{cases}$$

et si l'on opère comme ci-dessus, on en pourra déduire :

(70) $$a^3 u + a^2 b(2u_1 + u_2) + ab^2(2v_1 + v_2) + b^3 v = 0.$$

Posant, pour abréger, $\frac{b}{a} = \omega$, on voit que l'équation aux dérivées partielles du lieu dont le plan tangent reste parallèle à la droite *variable* (62), c'est-à-dire de toute pseudo-surface *réglée*, s'obtiendra en

éliminant ω entre les deux équations :

$$(71) \quad \begin{cases} r + (s + s_1)\omega + t\omega^2 = 0, \\ u + (2u_1 + u_2)\omega + (2v_1 + v_2)\omega^2 + v\omega^3 = 0. \end{cases}$$

Dans le cas particulier des *surfaces* réglées, on a $s_1 = s$, et, par suite, $u_2 = u_1$ avec $v_2 = v_1$. Le système précédent devient alors

$$(71') \quad \begin{cases} r + 2s\omega + t\omega^2 = 0, \\ u + 3u_1\omega + 3v_1\omega^2 + v\omega^3 = 0, \end{cases}$$

système exact et bien connu (*voir* SERRET, *Calcul différentiel*, p. 640).

VI.

Dernières considérations.

42. Si les néo-surfaces et les pseudo-surfaces se bornaient à généraliser les propriétés des surfaces ordinaires sur lesquelles la géométrie non euclidienne (plane) étaye ses conceptions, le mal, pour elle, ne serait pas bien grand. Mais il n'en va pas de la sorte, car, ainsi qu'on l'a vu principalement dans la deuxième Partie de ce Mémoire, l'introduction dans la Science des nouveaux lieux précités, ébranle et disloque, pièce par pièce, tout le corps de doctrine si péniblement élevé par la nouvelle géométrie.

Revenons en effet, parmi les exemples cités plus haut, à cette néo-surface moyenne F_m (n° 31, *Note*) qu'on peut toujours associer à une pseudo-surface donnée **F**. On a vu, que, tout hétérogènes qu'ils sont, ces deux lieux ont en commun partage, l'indicatrice, les lignes géodésiques, etc., et sont dès-lors exactement *applicables* l'un sur l'autre. Par contre, les lignes de courbure sont différentes des deux côtés et la courbure totale proprement dite, cette pierre angulaire (analytique) de tout l'édifice non euclidien, l'est aussi, en sorte que, malgré leur applicabilité, cette courbure peut-être *constante* sur l'un des lieux et *variable* sur l'autre.

Au fait, le plan et le pseudo-plan nous ont présenté cette anomalie : même indicatrice, bien que actuellement rejetée à l'infini, en chaque point, mêmes lignes géodésiques, à savoir : des lignes droites. Mais les lignes de courbure diffèrent, et l'on a vu en quoi (n° 40). Enfin la courbure totale est constamment nulle sur le plan, tandis que sur le pseudo-plan

elle est, ou *positive* ou négative, selon que le paramètre a est réel ou imaginaire. Il en faut conclure que la *géométrie des lignes de chacun des lieux envisagés* N'EST PAS ÉQUIVALENTE *à celle des lignes tracées sur l'autre*, fait capital, car il est en opposition formelle avec celui que présentent, en géométrie non euclidienne, le plan lobatchefskien ou riemannien, d'une part, la pseudo-sphère ou la sphère d'autre part.

43. Puisque notre choix s'est porté spécialement sur le plan (euclidien) et le pseudo-plan, arrêtons-nous quelques instants encore à ces deux lieux géométriques. Ils le méritent à tous égards. Seuls, en effet, et dans toutes leurs orientations, ils divisent l'espace en deux régions, qui, à la symétrie près, sont parfaitement *identiques*, bien supérieurs en cela à la sphère, à l'ellipsoïde, à l'hyperboloïde, etc., qui, eux, quelles que soient d'ailleurs leurs dimensions indéfiniment croissantes, ne sauraient partager ce même espace qu'en deux domaines nécessairement inégaux et dissemblables.

Mais si le plan et le pseudo-plan jouissent d'une si remarquable propriété, n'est-il pas évident que la ligne droite qui s'applique dans toute son étendue sur eux, doit, *à priori*, posséder un avantage analogue vis à vis du cercle, de l'ellipse, de l'hyperbole, etc. ? — N'insistons pas.

A deux plans parallèles correspondent deux droites, parallèles aussi et qui ne sont que l'intersection des plans donnés par un troisième. Or c'est précisément entre ces deux droites parallèles que se déroule cette célèbre *bande* plane dont le postulat d'EUCLIDE revendique l'invariable uniformité non moins que l'indéfinie continuité.

Juste et très légitime revendication que celle-là, dirons-nous, pour notre part, car elle consacre une de ces données fondamentales dont l'évidence objective s'impose à la rectitude originelle de l'esprit, non pas seulement comme un fait dérivant de l'observation, mais comme le produit spontané d'une vive et saine appréhension réflexe de l'espace, soit réel, soit *possible*, ou, si l'on veut encore, comme le substratum indispensable de la VRAIE science de l'étendue, en tant que réfractaire à toute restriction (ou même généralisation) systématiquement novatrice et, à plus forte raison, exclusivement fantaisiste.

Que conclure de là ? — Ceci surtout, à savoir : que les divers postulats, implicites ou explicites, celui d'EUCLIDE particulièrement, sur lesquels la géométrie ordinaire édifie ses théorèmes, constituent, eux aussi,

à leur façon, un « bloc » qu'il n'est pas permis au premier venu d'entamer, sous peine de ne former, avec les postulats restants, que des géométries tronquées, bizarres et gratuitement paradoxales, pures contrefaçons et, souvent, parodies grotesques de la géométrie une, simple, harmonieuse, immanente, comme l'Essence divine, dont elle n'est, dans l'ordre naturel, que le mode continu d'opération, celui-là même que dénote l'antique adage : « 'Αεί ό Θεός γεωμετρεί », géométrie enfin, à l'endroit de laquelle, n'en déplaise à ses modernes rivaux, sinon contradicteurs, EUCLIDE conservera toujours, nous n'en doutons pas, l'incomparable gloire d'avoir associé son nom.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE.

PRINCIPES ANALYTIQUES GÉNÉRAUX PROPRES À SUPPLANTER CEUX RELATIFS À LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

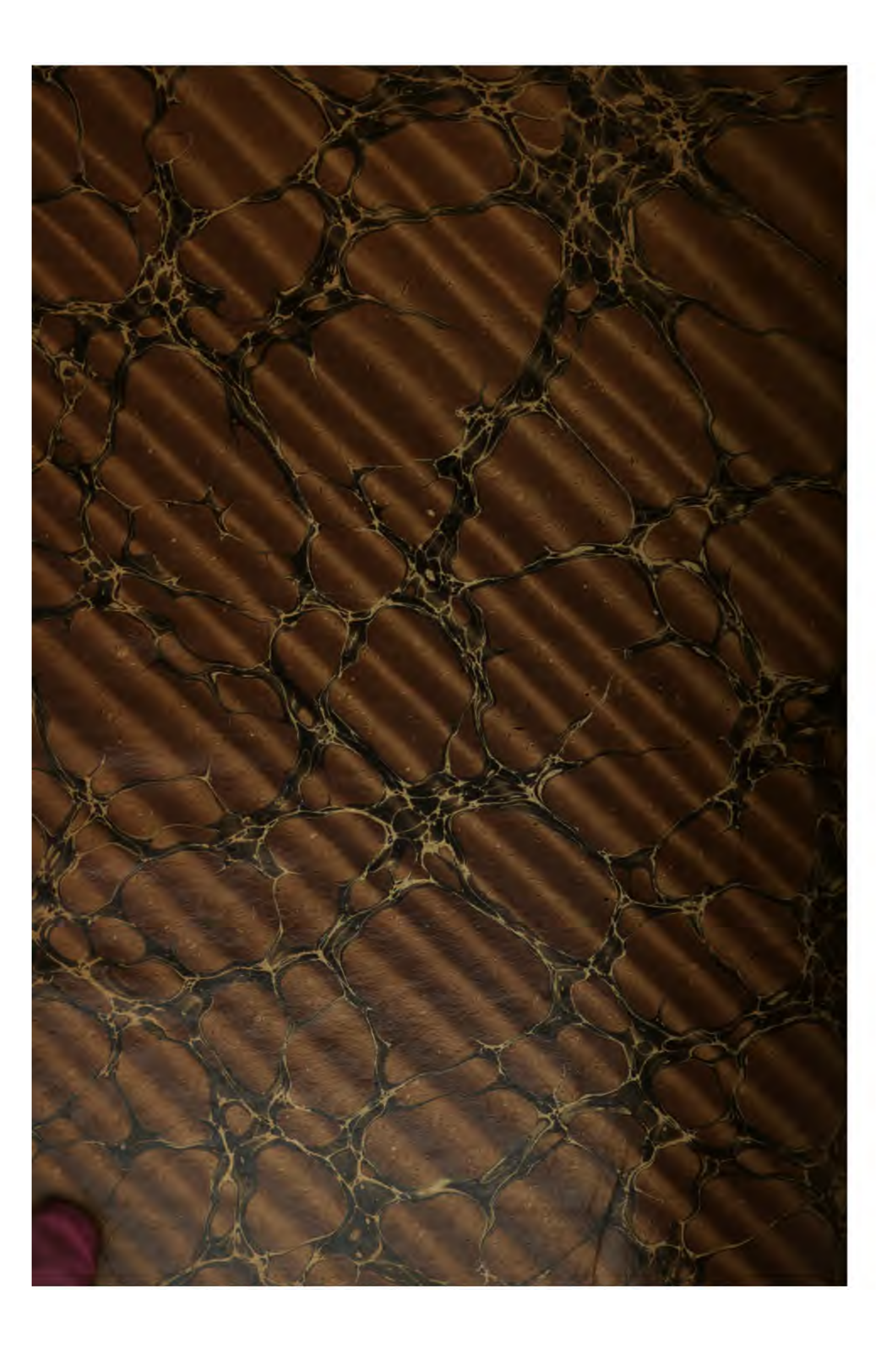
DEUXIÈME PARTIE.

QUELQUES EXEMPLES JUSTIFICATIFS EMPRUNTÉS, SOIT AUX NÉO-SURFACES, SOIT AUX PSEUDO-SURFACES.

TIPOGRAFIA MATEMATICA DI PALERMO, via Villareale, 11.
(274.1250.9) 2-7-1902.




SEP 19 1934




SEP 19 1934


Math 5859.02
La geometrie non euclidienne et l
Cabot Science 003344152
3 2044 091 916 833